

Estructuras de autocorrelación en el ajuste de funciones de ahusamiento dinámico en *Eucalyptus grandis*

*Tesis presentada para optar al título de Magister de la Universidad de Buenos Aires, Área
Biometría y Mejoramiento*

Cesar Gastón Torres

Ingeniero Forestal - Universidad Nacional de Santiago del Estero - 2009

Lugar de trabajo: INTA EEA Bella Vista



Escuela para Graduados Ing. Agr. Alberto Soriano
Facultad de Agronomía – Universidad de Buenos Aires



COMITÉ CONSEJERO

Director de tesis

Rosa Teresa Boca

Ingeniera Agrónoma (Universidad de Buenos Aires)

MSc (Universidad de Buenos Aires)

Doctora (Universidad de Buenos Aires)

Co-director

Federico Jorge Letourneau

Ingeniero Forestal (Universidad Nacional de la Patagonia)

Doctor (Universidad Nacional del Comahue)

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradezco a Teresa, directora de la presente Tesis, por dejarme hacer y sin quien no hubiese sido posible la consecución de la misma. A todos mis profesores y profesoras, compañeros y compañeras, principalmente por su paciencia.

A quienes de alguna forma u otra han contribuido en el desarrollo de este trabajo. A Daniel Gómez, Martín Palacios, Marcelo Canteros y Cecilia Lezcano, por su amistad y hacer posible que pudiese tomar los cursos.

A la institución pública, que me ha formado y permite mi desarrollo profesional, en particular a la EEA INTA Bella Vista y a la Universidad Pública.

A los colegas del programa de Biometría y Mejoramiento, Fito, Sebastián, Caro y Matías, mi admiración y respeto.

A las trabajadoras y trabajadores del INTA, entre ellos Hugo, Ana, Federico L. y Federico C. por el tiempo invaluable que me han deferido.

Por el privilegio de su amistad, a Esteban y Flia.

A Daiana todo mi cariño.

DECLARACIÓN

Declaro que el material incluido en esta tesis es, a mi mejor saber y entender, original producto de mi propio trabajo (salvo en la medida en que se identifique explícitamente las contribuciones de otros), y que este material no lo he presentado, en forma parcial o total, como una tesis en ésta u otra institución.

Cesar Gastón Torres

ÍNDICE GENERAL

AGRADECIMIENTOS	iii
DECLARACIÓN	iv
ÍNDICE GENERAL	v
ÍNDICE DE TABLAS	vii
ÍNDICE DE FIGURAS	ix
ABREVIATURAS.....	xi
RESUMEN	xiii
ABSTRACT	xiv
 CONTENIDO	
Capítulo Uno	2
1. Introducción	2
Capítulo Dos.....	7
2. Antecedentes y bases conceptuales	7
2.1. Modelos de crecimiento forestal.....	7
2.1.1. Perspectiva histórica	8
2.1.2. Modelos de árbol individual	10
2.1.3. Formulación de los modelos de crecimiento (empíricos)	12
2.2. Funciones de ahusamiento	17
2.2.1. Formulación de funciones de ahusamiento	19
2.3. Estimación	29
2.3.1. Estimador de Mínimos Cuadrados No Lineales (NLS)	30
2.3.2. Procesos de dependencia del error	30
2.3.3. Modelos no lineales mixtos (MNLN)	35
2.4. Estimación de funciones de ahusamiento	38
Capítulo Tres.....	41

3. Materiales y Métodos.....	41
3.1. Datos de crecimiento	41
3.2. Formulación y estimación del modelo de crecimiento.....	43
3.2.1. Vector de estado.....	45
3.2.2. Función de salida	47
3.2.3. Estimación del MCF estático de árbol individual	47
3.3. Simulación	49
3.4. Estimación del ahusamiento dinámico	54
Capítulo Cuatro	57
4. Resultados	57
4.1. Modelo de crecimiento.....	57
4.1.1. Curva de rendimiento (transición) del diámetro normal	57
4.1.2. Función hipsométrica	60
4.1.3. Función de salida del MCF	63
4.2. Simulación	65
4.3. Estimaciones y estimadores NLS vs. FGNLS	70
Capítulo Cinco	83
5. Discusión	83
Capítulo Seis.....	97
6. Conclusiones.....	97
Referencias	100
Anexo A. Diagnóstico en el ajuste de funciones del MCF	108
Anexo B. Implementación En R	111

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Estadísticos descriptivos para Dn (cm) y Ht (m) asociados al número de observaciones por grupo de edad (GE en años) de los datos de PMP de <i>Eucalyptus grandis</i> cultivado en suelos arenosos de Corrientes (Argentina).	43
Tabla 2. Medidas de la calidad relativa para las variantes del modelo BOD ajustados a los datos de PMP.	58
Tabla 3. Medias de los coeficientes del modelo BOD III, estimadas para el Dn de <i>Eucalyptus grandis</i> en Corrientes (Argentina) medido en PMP.	59
Tabla 4. Intervalos de confianza al 95% de los parámetros del modelo BOD III estimados con datos de PMP en <i>Eucalyptus grandis</i> de suelos arenosos de Corrientes (Argentina). ..	59
Tabla 5. Resumen de coeficientes aleatorios predichos por el modelo BOD III.	60
Tabla 6. Performance de las funciones hipsométricas ajustadas a <i>Eucalyptus grandis</i> cultivado en suelos arenosos de Corrientes (Argentina).	61
Tabla 7. Coeficientes fijos y prueba de significancia estimados de M6 ajustado en <i>Eucalyptus grandis</i>	62
Tabla 8. Intervalos de confianza de los parámetros de M6 estimados con los datos de PMP de <i>Eucalyptus grandis</i>	63
Tabla 9. Criterios de selección de las funciones de ahusamiento ajustadas a los datos de cubicaciones de árboles de <i>Eucalyptus grandis</i>	64
Tabla 10. Coeficientes fijos del modelo modificado de Kozak (2004) estimados en perfiles de ahusamiento de <i>Eucalyptus grandis</i> en suelos arenosos de Corrientes (Argentina).	64
Tabla 11. Resumen de los coeficientes aleatorios predichos de la función de ahusamiento de Kozak (2004) ajustada a perfiles diamétricos de <i>Eucalyptus grandis</i>	65
Tabla 12. Resultados de la validación de las estimaciones de ahusamiento en los escenarios con proceso AR(1) de variancia de 40^2 cm^4	71
Tabla 13. Resultados de la validación de las estimaciones de ahusamiento en los escenarios con proceso AR(1) de variancia de 80^2 cm^4	73
Tabla 14. Resultados de la validación de las estimaciones de ahusamiento en los escenarios con proceso AR(2) de variancia de 40^2 cm^4	74
Tabla 15. Resultados de la validación de las estimaciones de ahusamiento en los escenarios con proceso AR(2) de variancia de 80^2 cm^4	77
Tabla 16. Estimadores NLS y FGNLS de los coeficientes del modelo exponencial-general con errores autorregresivos de primer orden y variancia de 40^2 cm^4	79
Tabla 17. Estimadores NLS y FGNLS de los coeficientes del modelo exponencial-general con errores autorregresivos de primer orden y variancia de 80^2 cm^4	80
Tabla 18. Estimadores NLS y FGNLS de los coeficientes del modelo exponencial-general con errores autorregresivos de segundo orden y variancia de 40^2 cm^4	81

Tabla 19. Estimadores NLS y FGNLS de los coeficientes del modelo exponencial-general con errores autorregresivos de segundo orden y variancia de 80^2 cm^4	81
---	----

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Representación del fuste de un árbol, aproximación mediante sólidos geométricos y componentes de acuerdo al modelo de García (2015), lc : longitud de copa y $Hbcv$: altura de la base de la copa viva.	18
Figura 2. Ubicación de PMP de <i>Eucalyptus grandis</i> del sistema de inventario forestal empleadas en la formulación del MCF, discriminadas por localidad de cercanía.	42
Figura 3. Perfiles individuales observados del diámetro de <i>Eucalyptus grandis</i> cultivado en Corrientes (Argentina).	43
Figura 4. Esquema de la simulación del crecimiento individual y de perfiles dinámicos de la sección transversal con procesos de dependencia del error (\mathbf{e}) en <i>Eucalyptus grandis</i> . θ corresponde al vector de coeficientes aleatorios de distribución normal con vector de media α y matriz de variancia Λ , los supraíndices D , H y d identifican los componentes de Dn , Ht y diámetro en el fuste, \mathbf{x} el vector de estados de funciones de transición globales del Dn , F_1 , y la Ht , F_2 , $g()$ la función de ahusamiento diamétrico, Σ la matriz de covariancias de \mathbf{e} y \mathbf{st}_{it} el vector de ahusamiento de la sección transversal en el i -ésimo individuo a la edad t	49
Figura 5. Evolución del Dn individual observado en PMP de <i>Eucalyptus grandis</i> plantado en suelos arenosos del sudoeste de Corrientes (Argentina).	58
Figura 6. Predicción del Dn individual de <i>Eucalyptus grandis</i> mediante el modelo BOD III.	60
Figura 7. Relación Hipsométrica de la Ht observada con el Dn predicho del modelo BOD III en datos de <i>Eucalyptus grandis</i> colectados en PMP de Corrientes (Argentina).	61
Figura 8. Predicción de Ht de <i>Eucalyptus grandis</i> mediante el modelo M6.	63
Figura 9. Predicción del ahusamiento del diámetro de <i>Eucalyptus grandis</i> mediante el modelo ajustado de Kozak (2004).	65
Figura 10. Curva del error de muestreo sobre el coeficiente de asíntota (θ_{li}) de la función de transición del Dn (BOD III) elaborada para determinar el tamaño de muestreo.	67
Figura 11. Contraste de las distribuciones probabilísticas muestrales y poblacionales de los coeficientes del modelo BOD (A) y de la relación hipsométrica (B). Distribuciones poblacionales en líneas sólidas, muestrales en puntos (A) e histograma (B).	67
Figura 12. Distribuciones muestrales y poblacionales de los coeficientes de la función de salida del MCF obtenidos por simulación. Distribuciones univariadas de θ_4^d (A), θ_5^d (C), θ_8^d (F) y θ_9^d (J); bivariadas de $\theta_4^d - \theta_5^d$ (B), $\theta_4^d - \theta_8^d$ (D), $\theta_4^d - \theta_9^d$ (G), $\theta_5^d - \theta_8^d$ (E), $\theta_5^d - \theta_9^d$ (H) y $\theta_8^d - \theta_9^d$ (I). Puntos e histogramas representan distribuciones muestrales, líneas sólidas las poblacionales.	68
Figura 13. Crecimiento simulado de 5 mil árboles de <i>Eucalyptus grandis</i> : (A) rendimiento del Dn , (B) relación hipsométrica, (C) ahusamiento diamétrico y (D) ahusamiento de la sección transversal.	69

Figura 14. Función de autocorrelación de los procesos autorregresivos simulados en perfiles de ahusamiento de la sección transversal individual, Procesos AR(1) de baja autocorrelación con $\phi_1 = 0,5$ (A) y elevada autocorrelación con $\phi_2 = 0,85$ (B), y Procesos AR(2) de autocorrelación baja con $\phi_1 = 0,7$ y $\phi_2 = -0,1$ (C) y elevada con $\phi_1 = 0,7$ y $\phi_2 = 0,2$ (D)..... 70

Figura 15. Valor absoluto de la media del error de estimación de los modelos de ahusamiento dinámicos en la validación de los métodos NLS y FGNLS en los escenarios AR(1) con variancia de 40^2cm^4 . Modelo exponencial-exponencial en escenario de autocorrelación $AR(\phi_1 = 0,5)$ (a) y $AR(\phi_1 = 0,85)$ (c); modelo exponencial-general $AR(\phi_1 = 0,5)$ (b) y $AR(\phi_1 = 0,85)$ (d). 72

Figura 16. Valor absoluto de la media del error de estimación de los modelos de ahusamiento dinámicos en la validación de los métodos NLS y FGNLS en los escenarios AR(1) con variancia de 80^2cm^4 . Modelo exponencial-exponencial en escenario de autocorrelación $AR(\phi_1 = 0,5)$ (a) y $AR(\phi_1 = 0,85)$ (c); modelo exponencial-general $AR(\phi_1 = 0,5)$ (b) y $AR(\phi_1 = 0,85)$ (d). 74

Figura 17. Valor absoluto de la media del error de estimación de los modelos de ahusamiento dinámicos en la validación de los métodos NLS y FGNLS en los escenarios AR(2) con variancia de 40^2cm^4 . Modelo exponencial-exponencial en escenario de autocorrelación $AR(\phi_1 = 0,7, \phi_2 = -0,1)$ (a) y $AR(\phi_1 = 0,7, \phi_2 = 0,2)$ (c); Modelo exponencial-general $AR(\phi_1 = 0,7, \phi_2 = -0,1)$ (b) y $AR(\phi_1 = 0,7, \phi_2 = 0,2)$ (d)..... 76

Figura 18. Valor absoluto de la media del error de estimación de los modelos de ahusamiento dinámicos en la validación de los métodos NLS y FGNLS en los escenarios AR(2) con variancia de 80^2cm^4 . Modelo exponencial-exponencial en escenario de autocorrelación $AR(\phi_1 = 0,7, \phi_2 = -0,1)$ (a) y $AR(\phi_1 = 0,7, \phi_2 = 0,2)$ (c); modelo exponencial-general $AR(\phi_1 = 0,7, \phi_2 = -0,1)$ (b) y $AR(\phi_1 = 0,7, \phi_2 = 0,2)$ (d)..... 78

Figura 19. Evaluación gráfica del modelo BOD III, ajuste y supuestos distribucionales. 108

Figura 20. Evaluación gráfica de la capacidad predictiva y el cumplimiento de supuestos distribucionales de la función hipsométrica seleccionada (Schrüeder II).109

Figura 21. Evaluación de la capacidad predictiva y del cumplimiento de los supuestos distribucionales de los componentes aleatorios en la estimación de la función de Kozak (2004).110

ABREVIATURAS

AIC	Criterio de Información de Akaike (del inglés <i>Akaike Information Criterion</i>)
AR	Autoregresivo/a.
ARMA	Autorregresivo de media móvil (del inglés <i>Autoregressive Moving-Average</i>)
BIC	Criterio de Información Bayesiano (del inglés <i>Bayesian Information Criterion</i>)
BOD	Demanda de oxígeno bioquímico (del inglés <i>Biochemical Oxygen Demand</i>).
CAR	Autorregresiva Continua (del inglés <i>Continuous Autoregressive</i>)
DI	Diámetro normal sin corteza
Dn	Diámetro normal
Dq	Diámetro cuadrático
DR	Diámetro Relativo
EE	Error de Estimación
FGLS	Mínimos Cuadrados Generalizados Factibles (del inglés <i>Feasible Generalized Least Squares</i>)
FGNLS	Mínimos Cuadrados No Lineales Generalizados Factibles (del inglés <i>Feasible Generalized Nonlinear Least Squares</i>)
GEE	Ecuaciones de Estimación Generalizada (del inglés <i>Generalized Estimation Equations</i>)
GI	Grados de libertad
Hbcv	Altura de la base la copa viva
Hd	Altura dominante
Ht	Altura total
IS	Índice de Sitio
LB	Lindstrom-Bates
lc	Longitud de copa
Lc	Longitud de corte

Li	Límite inferior
Ls	Límite superior
MA	Media Móvil (del inglés <i>Moving Average</i>)
MCF	Modelo de Crecimiento Forestal
MEE	Modelo de ahusamiento dinámico exponencial-exponencial
MEG	Modelo de ahusamiento dinámico exponencial-general
MLE	Efectos Mixtos Lineales (del inglés <i>Mixed Linear Effects</i>)
MNLM	Modelos No Lineales Mixtos
NLS	Mínimos Cuadrados No Lineales (del inglés <i>Nonlinear Least Squares</i>)
OLS	Mínimos Cuadrados Ordinarios (del inglés <i>Ordinary Least Squares</i>)
PMP	Parcelas de Medición Permanente
PNLS	Mínimos Cuadrados No Lineales Penalizados (del inglés <i>Penalized Nonlinear Least Squares</i>)
RMSE	Raíz del Error Cuadrático Medio (del inglés <i>Root of Mean Square Error</i>)
RSS	Suma de cuadrados residual (del inglés <i>Residual Sum of Squares</i>)
Sn	Sección transversal normal
St	Sección transversal

RESUMEN

*Estructuras de autocorrelación en el ajuste de funciones de ahusamiento dinámico en *Eucalyptus grandis**

Las funciones de ahusamiento modelan el decrecimiento del diámetro o de la sección transversal con el incremento de la longitud del fuste del árbol, relación intrínsecamente no lineal. Las que se denominan funciones dinámicas absorben la variabilidad debida a la edad del árbol y por ello son trascendentales en la construcción de modelos de crecimiento forestal (MCF). Para su ajuste emplean datos longitudinales, en consecuencia las observaciones se encuentran autocorrelacionadas dentro del árbol o perfil y no es factible sustentar los supuestos iniciales de la estimación de mínimos cuadrados. En esta tesis se pone a prueba la afirmación de que la violación del supuesto de independencia afecta las cualidades de la estimación de mínimos cuadrados no lineales (NLS), lo que se efectúa por contraste con estimadores que incorporan estructuras de autocorrelación en la estimación de funciones de ahusamiento dinámico de *Eucalyptus grandis*. A tal fin, con el objetivo de poder simular perfiles temporales de fuste de *E. grandis* con diferentes estructuras de autocorrelación, se modeló el crecimiento a partir de información empírica generada en unidades de observación. Dicha modelización se realizó bajo el enfoque de estados de crecimientos conjuntamente al de modelos no lineales mixtos; se obtuvo así un MCF individual, estático e independiente de la distancia de *E. grandis*. Este MCF se constituyó de funciones de transición global de las principales variables dasométricas, tal que el sistema se puede caracterizar en cualquier punto del rango de edad (0 a 15 años). De cada función se brindan las distribuciones posteriores de los coeficientes, que se emplearon en la simulación de una población de la cual se obtuvo una muestra de 5 mil individuos. Se determinó que este tamaño muestral genera un error de 0,1 cm de la asíntota del diámetro normal (D_n), variable que determina el comportamiento de las funciones restantes. Mediante esta muestra se simularon los perfiles temporales del fuste con estructuras de autocorrelación autorregresivas de primer y segundo orden que combinan dos intensidades, alta y baja, de dependencia y de varianza. Finalmente, la función de ahusamiento dinámica estudiada se ajustó mediante NLS y con mínimos cuadrados no lineales factibles (FGNLS); dicho ajuste se efectuó con observaciones distanciadas a 1 y 3 metros. En cada escenario simulado, se estimaron las variantes de ahusamiento dinámico exponencial-exponencial (MEE) y exponencial-general (MEG). Al comparar los métodos de estimación se comprobó que las estimaciones NLS generan sesgos significativos que generalmente se incrementan conforme a la distancia entre observaciones, a la vez que las estimaciones FGNLS resultan insesgadas y sus estimadores, sensibles a la varianza del proceso de dependencia, tienen distribuciones significativamente distintas a los obtenidos por NLS. El trabajo se focaliza en la comparación de métodos de estimación en modelos no lineales, con foco en el ahusamiento dinámico, permite visibilizar la factibilidad de incorporar estructuras de autocorrelación cuando los supuestos de independencia y de linealidad no se pueden sostener. A su vez, en el discurrir del mismo se abona al conocimiento de la modelización del crecimiento de plantaciones forestales, la simulación de dichos procesos y en las estrategias de muestreo.

Palabras clave: procesos de dependencia, métodos de estimación, ahusamiento dinámico.

ABSTRACT

*Autocorrelation structures on adjustment of dynamic taper functions of *Eucalyptus grandis**

Taper functions model the diameter or cross-sectional area reduction with tree stem length increase, an intrinsically nonlinear relationship. The dynamic functions include the variability due to the age of tree and therefore are critical in the construction of forest growth models (MCF). Longitudinal data is used for its adjustment, and therefore the observations are autocorrelated within the tree or profile and it is not feasible to support the initial assumptions of the least squares estimation. This thesis assesses if the violation of independence assumption does affect the quality of nonlinear least-squares estimation (NLS). For doing so, NLS estimation is contrasted with estimators that incorporate autocorrelations structures while estimating taper functions of *E. grandis*. In order to simulate temporary profiles of *E. grandis* stem with different autocorrelations structures, individual growth was modeled from empirical data generated in observational units. Such modeling was carried out under the state-space and mixed nonlinear model approaches; thus, an individual MCF static and independent of distance of *E. grandis* was achieved. This MCF was composed of global transition functions of the main dasometric variables, such that it is possible to characterize the system at any point in the age range (0 to 15 years). The posterior distributions of coefficients are provided for each function of the MCF; these distributions were used in the simulation of a population from which a sample of five thousand individuals was obtained. This sample size was determined to generate an error of 0.1 cm for the normal diameter (D_n) asymptote, which determines the behavior of the remaining functions. With this sample, the stem temporary profiles were simulated with first and second degree autoregressive autocorrelation structures that combine two intensities, high and low, of dependency and variance. Finally, the dynamic taper function studied was adjusted with NLS and feasible generalized nonlinear least squares (FGNLS) using observations every 1 and 3 meters. For each simulated scenario, the exponential-exponential (MEE) and exponential-general (MEG) dynamic taper variants were estimated. When comparing the estimation methods, it was found that NLS estimates generate significant biases that increase with the distance between observations, at the same time that FGNLS estimates are unbiased and their estimators, sensitive to the variance of the dependency process, have significantly different distributions to those obtained by NLS. The work focuses on the contrast between estimation methods in nonlinear models, particularly on dynamic taper functions; it allows visualizing the feasibility of incorporating autocorrelation structures when the assumptions of independence and linearity cannot be sustained. In turn, its development contributes to the knowledge of the modeling of the growth in forest plantations, the simulation of these processes and the sampling strategies.

Key words: dependency processes, estimation methods, dynamic taper model.

Capítulo Uno. *Introducción*

Capítulo Uno

1. Introducción

Las plantaciones forestales pueden ser caracterizadas mediante el estudio tanto de la velocidad de crecimiento de sus principales características o variables tales como diámetro, altura, volumen, como por la forma de sus componentes, ejemplo: rectitud de fuste, estructura de copa, forma del fuste. Tanto las tasas de crecimiento como los parámetros de forma varían temporalmente. Los modelos de crecimiento forestales (MCF) son construcciones (conceptuales o matemáticas) que especifican en cualquier punto en el tiempo estados o valores actuales de las características o variables involucradas, de crecimiento o de forma, y permiten el tránsito entre dichos estados mediante funciones de transición o de enlace; estas últimas son función de los mismos estados puntuales y/o de variables externas. Las primeras formulaciones de estos MCF consistían en las denominadas tablas de cosecha, que se construían con entradas especificadas por condiciones de sitio-edad y que proveían estimaciones de volumen (Pretzsch 2009). En las mismas el cociente entre el volumen del fuste y el comprendido por un cilindro, definido por el diámetro de referencia del fuste, correspondía al factor de forma incorporado a estos primigenios modelos de crecimiento (Assmann 1970; Pretzsch 2009).

La expresión anterior da la idea de modelo como abstracción de la realidad bajo supuestos generados con el objeto de facilitar la comprensión de la misma. Estos supuestos se generan fundamentalmente por dos causas; una es la incapacidad de abarcar o comprender todas las variantes de un proceso, a veces condicionada por la base conceptual en la que se sustenta, y la segunda es la factibilidad de su implementación/estimación computacional, que a su vez es funcional a la disponibilidad de información (datos) de buena calidad. La posibilidad de relajar supuestos por mejoras en la descripción de procesos, avances en las capacidades computacionales y/o en el aumento de la disponibilidad de información permitió avanzar de modelos de masa (rodal) a modelos de árbol individual (Prodan *et al.* 1997; Le Roux *et al.* 2001; Crecente-Campo 2008). En plantaciones forestales realizadas bajo marcos regulares y manejos que no supongan intervenciones drásticas, es posible sostener los supuestos de estabilidad temporal y espacial, lo cual da como resultado modelos de árbol individual estáticos e independientes de la distancia (Munro 1974, 1984; García 1988;

Muhairwe 1993, 1999).

En plantaciones forestales mono-específicas y coetáneas, los MCF de árbol individual se construyen comúnmente con ecuaciones de crecimiento o rendimiento del diámetro normal (Dn), modelos predictivos de la altura total (Ht) (Sun *et al.* 2019) y funciones de ahusamiento del fuste (Muhairwe 1993). Estas últimas consisten en ecuaciones matemáticas que describen la variación del radio, diámetro o sección transversal a lo largo del fuste mediante variables independientes tales como el Dn , la Ht , la altura de la base de la copa viva ($Hbcv$) y/u otras. Las funciones de ahusamiento permiten predecir el diámetro del fuste a una altura dada o bien, mediante su integración, estimar el volumen para todo el árbol o en un tramo específico del fuste. Estas funciones son ajustadas asumiendo el supuesto de que los cambios en las variables independientes son suficientes para describir la variación en la forma del fuste entre árboles.

La principal complejidad en el estudio de la forma del fuste es la falta de regularidad geométrica del mismo. Diferentes abordajes o teorías se han planteado para poder modelar o explicar esta irregularidad. El enfoque nutricional (Larson 1963), el de conductividad hidráulica y el hormonal pueden entenderse como ramificaciones de la teoría ecofisiológica introducida por Da Vinci, estudiada por Pressler (1864) y ampliada en el modelo del conducto (Shinozaki *et al.* 1964; Mäkelä 1986). La denominada teoría mecanicista de Metzger (1893) considera que la forma de fuste responde a la resistencia impuesta por el viento. A esta formulación, Gray (1956) le agrega la fuerza de soporte del peso de la copa.

Numerosas expresiones matemáticas se han desarrollado bajo ambas teorías, las cuales se han basado en el supuesto (el más restrictivo al menos) de que los cambios en las variables independientes son suficientes para modelar los cambios en la forma del fuste. Por lo tanto, a estas expresiones se las agrupa bajo la denominación de “estáticas”. Una de las más conocidas y utilizadas es la generada por Kozak (Kozak *et al.* 1969; Kozak 1988, 2004), el cual establece que la relación entre el k -ésimo diámetro (d_k) y el de referencia (Dn) es función de una medida de proporción de la altura afectada a un exponente, en tanto que dicho exponente es función de la k -ésima altura relativa a la Ht . El enfoque de Kozak permite generar una función continua que describe la variación del diámetro a lo largo de todo el fuste mediante un exponente de forma variable que compensa la parte neloide, paraboloide y cónica del tronco.

Muhairwe (1993) modifica el exponente de forma de Kozak para obtener una función de ahusamiento dinámico, definiendo a esta última como la función que permite obtener el diámetro en cualquier punto del fuste en el tiempo (edad). García (2015) desarrolla una función de ahusamiento dinámico consistente tanto con la teoría mecanicista como con la fisiológica. Conceptualmente las funciones de ahusamiento dinámico permiten absorber la variabilidad debida a la edad del árbol condicional a las condiciones de crecimiento (Muhairwe 1993). La variabilidad inducida por la edad del árbol se explica por cambios en el tamaño, estructura y dinámica de copa, condicional a procesos de competencia que resultan de marginalizar, estadísticamente o matemáticamente, las características del sitio y de manejo del rodal. Holísticamente, con el aumento de la edad los procesos de competencia tienden a incrementarse, en consecuencia, surgen procesos de supresión de copas y mortalidad de ramas basales que favorecen a la disminución del grado de ahusamiento (formas más cilíndricas) y mayor variabilidad en el tiempo dentro de individuos. Cuando los procesos de competencia son leves y estables, la proporción de copa viva se incrementa proporcionalmente con la edad generando mayores niveles de ahusamiento (formas cónicas) y mayor variabilidad entre individuos. Entre estos estados existen una amplia gama de situaciones, a veces generadas por intervenciones que aceleran o retrasan dichos procesos de competencia (Muhairwe 1993; Tasissa y Burkhart 1997).

Comúnmente, en estos modelos individuales los parámetros se estiman mediante mínimos cuadrados ordinarios (OLS, de sus siglas en inglés) o mínimos cuadrados no lineales (NLS) (Muhairwe 1993; García 2015). Una alternativa, probablemente más eficiente, consiste en aplicar el enfoque de modelos jerárquicos, estimando explícitamente la distribución empírica de los parámetros y prediciendo los efectos aleatorios a nivel de los individuos (Lindstrom y Bates, 1988, 1990; Pinheiro y Bates 1995, 2000). Complementariamente, las estimaciones OLS y NLS suponen la independencia entre observaciones, pero este supuesto no es factible de sostener en el marco de la construcción de modelos de crecimiento forestal y de los submodelos que lo componen. Ello se debe a la naturaleza longitudinal de las observaciones en el individuo, a lo largo del fuste en el caso de las funciones de ahusamiento y en edades sucesivas utilizadas para estimar curvas de rendimiento o crecimiento. Muhairwe (1993) expresa que los estimadores de mínimos cuadrados generalizados factibles (FGLS) presentan mejores características que los OLS y

NLS, pero no los utiliza dada la complejidad computacional que requiere su implementación. Kozak (1997, 2004) y García (2015) coinciden al afirmar que considerar estructuras de dependencia del error complejas no tiene impactos de significancia en los estimadores. Pourahmadi (1999) expresa una idea interesante que consiste en considerar un modelo conjunto con tres componentes: el de tendencia, de variancia y el de dependencia. Este enfoque permitiría contemplar estructuras de relativa complejidad en el error.

Conforme al contexto descripto en los apartados precedentes, el objetivo general de esta tesis es proponer y evaluar estructuras de autocorrelación en la estimación de funciones dinámicas de ahusamiento del perfil de fuste de *Eucalyptus grandis* Hill ex Maiden. Los objetivos específicos son: 1) simular perfiles de fuste temporales de *Eucalyptus grandis* mediante un modelo de crecimiento individual estático independiente de la distancia, adicionando diferentes estructuras de correlación, 2) obtener estimadores de los coeficientes de la función de ahusamiento dinámico, para los datos de cubicaciones simuladas con diferentes estructuras de (co)varianza, mediante dos métodos divergentes y, finalmente, 3) comparar los métodos de estimación y determinar el impacto de la autocorrelación en la precisión, sesgo y variancia de las estimaciones en los distintos escenarios simulados.

El documento se organiza en seis capítulos, el primero de los cuales corresponde a la presente introducción. A continuación, en el Capítulo Dos, se presentan la revisión bibliográfica en la cual se detallan los conceptos y enfoques mediante los que se modela el ahusamiento del fuste de los árboles y se puntualiza en las funciones dinámicas en el marco de MCF. Además, en este apartado que se constituye en el marco teórico de referencia, se explican los procesos de dependencia más comunes que rigen los datos que se emplean y se detallan los métodos de estimación. En el Capítulo Tres se describe el conjunto de datos y el enfoque con el que se formula y estima el MCF, y posteriormente se detalla el procedimiento de simulación mediante el cual se obtienen diferentes escenarios con datos autocorrelacionados; finalmente, se detalla la función de ahusamiento de García (2015) y se presentan los métodos de estimación que se comparan. Los resultados obtenidos se detallan en el Capítulo Cuatro. Por último, se realiza una discusión general de los resultados en el Capítulo Cinco y se enuncian las conclusiones generales en el Capítulo Seis.

Capítulo Dos. *Antecedentes y bases conceptuales*

Capítulo Dos

2. Antecedentes y bases conceptuales

En este apartado se realiza un recuento del conocimiento acumulado hasta la fecha acerca de las funciones de ahusamiento y de los métodos de estimación con la cual se generan las mismas. Estas funciones son componentes de diversas herramientas de gestión forestal, tal como rendimiento en cosecha, trozado y clasificación en *log grade* de cosecha, modelos de trozado y aserrado dinámico, por tanto pueden abordarse desde el contexto de algunas de ellas. La presente investigación se enfoca en las funciones de ahusamiento como componentes de los MCF, más aún en sus métodos de estimación. En consecuencia, inicialmente se brindan conceptos acerca de los modelos de crecimiento forestal, de los enfoques con los que se construyen, el estado actual del conocimiento y las perspectivas actuales. Posteriormente se desarrolla el estado de arte de las funciones de perfil de ahusamiento y se puntualiza en los métodos de estimación.

2.1. Modelos de crecimiento forestal

Un modelo, en el contexto de la investigación, es una abstracción de la realidad que permite la reproducción de la misma para cumplir con algún objetivo, ya sea de poner a prueba hipótesis o simplemente simular y predecir características que el modelo describe. El modelo se construye acorde a objetivos determinados por supuestos sostenibles que hacen posible generar dicha abstracción, a la vez que determinan el grado de complejidad y la resolución del mismo.

Pretzsch (2009) enuncia que un sistema forestal se define por las características de sus componentes (rodales, parches, árboles, otros), las relaciones entre éstos y las reglas que las rigen. La magnitud de las dimensiones y períodos de vida de los sistemas forestales suelen ser superiores en varios órdenes de magnitud a los componentes de otros sistemas, productivos o no, determinando la necesidad de generar enfoques de investigación específicos. El sistema en sí es abierto, intercambia con su medio energía, materia y otros, está determinado por su estructura espacial, principalmente en bosques naturales, respeta una organización jerárquica (la más simple: bosque→ rodal→ árbol→ órgano), es dinámico y multidimensional.

Un MCF es la abstracción realizada acorde a supuestos sostenibles, de todo el sistema forestal o parte de él, que describe la evolución temporal de variables, características o dimensiones de interés definidas en estados puntuales. Esta descripción puede ser conceptual y/o numérica y puede realizarse mediante relaciones funcionales matemáticas que asocian tasas de cambio a variables de estado o de control. Para un modelo de crecimiento en el que se describen las cantidades de dos variables en cualquier estado en un determinado punto del tiempo, el mismo debe cumplir: a) estados futuros se encuentran definidos por estados actuales y b) ambas variables deben estar determinadas en cada estado. El cumplimiento de estas condiciones dota de consistencia al sistema de ecuaciones (Sharma *et al.* 2002) y por tanto el mismo se encuentra determinado.

2.1.1. Perspectiva histórica

Las primeras representaciones realizadas por el hombre corresponden a la ubicación geográfica, por ende podemos asignarle a los mapas el carácter de primeros modelos forestales, pero no el de crecimiento, que ubican y caracterizan cualitativamente por usos potenciales los recursos forestales. Crecente-Campo (2008) y Pretzsch (2009) coinciden al señalar que los primeros modelos de crecimiento corresponden a las tablas de rendimiento generadas en Alemania, por la Asociación de Estaciones Alemanas de Investigación Forestal, hacia fines del siglo dieciocho. Estas tablas brindaban información del rendimiento en volumen comercializable, mínimo y máximo, para rodales de cien años clasificados por calidades de sitio y para cada especie maderable del bosque. Los autores citados anteriormente convienen en señalar a Paulsen, Hartig, Smalian, entre otros, como los principales contribuidores en el desarrollo de esta primera generación de modelos. En esta etapa las principales dificultades corresponden a la escasa disponibilidad de datos y de métodos, Smalian es reconocido por el desarrollo de su método de cubicación que aún se aplica.

A finales del siglo diecinueve se inicia el desarrollo de la segunda generación de tablas de rendimiento. En las mismas, la información de las características del rodal se agrega en formato tabular en función de tratamientos silviculturales “normalizados”. Madrigal Collazo *et al.* (1999) y Gehrhardt (1921) citado por Pretzsch (2009) corresponden a claros ejemplos de este tipo de estudios. Posteriormente, ya con el desarrollo de la computación, se gesta la tercera generación de tablas de rendimiento. La información de salida se presenta en formato

tabular con múltiples entradas y se encuentra asociada a modelos biométricos parametrizados por estudios que determinan el desarrollo del rodal en función de manejo, sitio y otros factores. Assmann (1970) es un precursor de estos modelos e influye en el desarrollo de los mismos hasta la actualidad, como en el caso del trabajo de Sánchez *et al.* (2003).

Los modelos hasta aquí descriptos realizan sus abstracciones mediante agregados a nivel de rodal (modelos de masa), los cuales comenzaron a ser reemplazados a partir de 1960 por modelos de frecuencia de distribución de clases de tamaño o bien modelos de árbol individual. Los primeros reproducen los cambios en la distribución de frecuencia en el período evaluado en relación al crecimiento, el renoval y la mortalidad. En estos modelos se distinguen los que se construyen en base a ecuaciones diferenciales (García 1988), consisten básicamente en razones de cambio modeladas por covariables de control que describen el crecimiento dentro de clases de tamaño y el tránsito hacia clases superiores (Pretzsch 2009). Otros modelan directamente la progresión de las funciones de distribución, metodología desarrollada por Clutter y Bennett (1965) y aplicada por Knoebel *et al.* (1986) entre otros. Finalmente, también en este grupo, se distinguen los que dada una frecuencia de distribución inicial proyectan la siguiente mediante funciones de transición probabilística que determinan el tránsito entre clases diamétricas, siempre ascendente, en el período considerado, *eg.*: matrices de transición aplicadas por Sanquetta *et al.* (1998). Los así denominados modelos de árbol individual realizan la descripción de los estados al nivel de detalle especificado en su denominación (García 1988).

Posterior a la tercera generación de modelos, con el impulso de la computación, la diferenciación en tipos no es clara y el avance hacia modelos superadores no es unidireccional. Un claro ejemplo de ello es el modelo de Sánchez *et al.* (2003) que genera tablas de rendimiento asociadas a modelos biométricos (modelos de la tercera generación) o Fassola *et al.* (2013) que desarrolla simuladores de masa asociados a distribuciones diamétricas empíricas. Pretzsch (Pretzsch 2009; Pretzsch *et al.* 2002) clasifica a los modelos hasta aquí enunciados como de enfoque de *black-box*, empíricos según Broz (2015), estocásticos de acuerdo a García (1988). Son asignados a esta categoría dado que el objetivo es predecir el crecimiento sin puntualizar o describir los principios ecológicos y fisiológicos subyacentes.

Durante las últimas décadas los investigadores forestales han puesto énfasis en

desarrollar modelos desde el enfoque de *white-box* para poder responder a preguntas concernientes a la polución del aire, empobrecimiento de suelos y cambio climático. Es factible discriminar los modelos GAP, eco-fisiológicos e híbridos. Los modelos GAP estudian la dinámica forestal en pequeños parches interconectados y son útiles en el estudio de la dinámica de sucesión; modelan el crecimiento del árbol en el parche de acuerdo a las relaciones precedentes dentro del mismo. El prototipo de modelo corresponde al desarrollo de Botkin *et al.* (1972) denominado JABOWA, modelos actuales siguen los principios que enuncian dichos autores y es aplicado actualmente como es el caso del trabajo de Zhang *et al.* (2017). Los modelos eco-fisiológicos, de balance de materia o masa, se concentran en describir procesos (absorción de la radiación, intercepción de precipitación, evapotranspiración, disponibilidad de nutrientes, fotosíntesis-respiración, patrones de alocación de producción, senescencia y mortalidad) y dejan un poco de lado las derivaciones de las relaciones estadísticas. Los modelos híbridos combinan las formulaciones empíricas con los modelos eco-fisiológicos. Pretzsch (2009) detalla once modelos eco-fisiológicos generales, uno de los cuales corresponde al propuesto por Landsberg y Waring (1997) conocido como 3-PG (principios fisiológicos en la predicción del crecimiento). Gupta y Sharma (2019), en su revisión, detallan ochenta y siete trabajos de modelado 3-PG desde el año 2000 al 2017. Estos puntos permiten apreciar el énfasis en generar estos modelos, lo cual se puede matizar (salvando las distancias temporales) si consideramos que esta revisión contiene el doble de trabajos, para una subclase de modelos, que la compilación de Ek y Dudek (1980).

2.1.2. Modelos de árbol individual

Munro (1974) citado por Pretzsch *et al.* (2002), define a los MCF de árbol individual como aquellos que describen al rodal como un mosaico de árboles individualizados y simulan el crecimiento de éstos y sus interacciones, algunos de los cuales incorporan alguna medida de posición espacial del árbol. García (1988) y Pretzsch (2009) señalan que la característica sobresaliente de estos modelos es que el nivel de observación coincide con el de descripción. Representan modelos de alta resolución y, en función de su formulación, permiten generar información con resoluciones menores mediante la integración de la misma. Aquellos que contemplan alguna medida de la ubicación espacial se denominan modelos de crecimiento de árbol individual dependientes de la distancia. Intrínsecamente este tipo de modelos

contemplan la estructura espacial presente en la varianza residual pero no la modelan explícitamente. Uno de los problemas es que la varianza presenta diferentes patrones entre escalas, correlaciones negativas a pequeñas escalas y positivas a mediana escala, y orientaciones, polimorfismo (Webster y Oliver 2007). Por tanto generar estos modelos supone un alto costo en la descripción de los estados puntuales, en términos computacionales y/o en los supuestos en los que se sustenta. El enfoque contrapuesto al descrito previamente genera los MCF de árbol individual independientes de la distancia.

En Pretzsch *et al.* (2002) y Pretzsch (2009) se enuncia como el primer MCF de árbol individual al desarrollado por Newman en 1964. Ek y Dudek (1980) distinguen cuarenta y siete modelos publicados en ciento treinta y un trabajos, veintiuno clasificados como independientes de la distancia entre los que se encuentra el trabajo de Newman. El modelo de pronóstico de rodal (*Stand Prognosis Model*) de Wykoff *et al.* (1982), uno de los ejemplos más logrados; es ampliamente usado en la actualidad, tal como en Sun *et al.* (2019), y permite simular el comportamiento de once especies en treinta sitios del Noroeste de EEUU. Estos autores introducen la idea de efecto aleatorio debido al individuo, predicho por el desvío estándar del logaritmo del incremento de la sección normal individual. Otros modelos se construyen por técnicas indirectas que estiman un potencial y predicen el crecimiento individual como una proporción de dicho potencial (Pretzsch *et al.* 2002; Hasenauer 2006; Pretzsch 2009; Sharma y Brunner 2017).

Crecente-Campo (Crecente-Campo 2008; Crecente-Campo *at al.* 2012; Crecente-Campo *et al.* 2010) desarrolla un MCF de árbol individual en plantaciones de *Pinus radiata* para Galicia (España), aunque el enfoque del mismo es confuso dado que habla de estimar efectos aleatorios del rodal, del árbol y del período, pero no brinda las estimaciones de esa variabilidad, y sus conclusiones son ambiguas en cuanto a la inclusión de la dependencia de la distancia: enuncia que empeora las estimaciones de crecimiento en *Ht* y no mejoran considerablemente los de *Dn* ni de la sección normal.

Por otra parte, dado el nivel de resolución del modelo, es imprescindible que una de las variables determinada en los estados puntuales de un MCF de árbol individual sea el volumen individual o bien alguna función que permita obtenerlo. Es factible enunciar al volumen individual como una función de los cambios del radio, diámetro o sección a lo largo del fuste. Estas funciones se conocen como modelos de perfil, función de forma o función de

ahusamiento de fuste.

2.1.3. Formulación de los modelos de crecimiento (empíricos)

En Vanclay (1994), Crecente-Campo (2008) y Pretzch (2009) los MCF, cualquiera sea el nivel de resolución del mismo o los supuestos con los que se construye, se formulan acordes a un sistema de ecuaciones en cuya estructura es factible discriminar funciones de control, de reclutamiento, mortalidad y de predicción de crecimiento. En consecuencia, el modelo de crecimiento se construye de tal forma que, al nivel de resolución que se modele y para cada período entre los momentos t_i y t_{i+1} , las funciones de control determinan las condiciones del medio de crecimiento; mediante las funciones de reclutamiento y mortalidad se establecen los nuevos árboles que se incorporan a la masa y aquellos que mueren; finalmente las funciones de predicción proyectan las variables en el período contemplado. Luego de un ciclo de crecimiento las funciones de control determinan si las condiciones de crecimiento cambian, a consecuencia de los cambios generados por el propio proceso de crecimiento o por intervenciones del silvicultor, y el ciclo se repite.

Funciones de control

El conjunto de funciones de control se constituye en indicadores indirectos de la potencialidad de crecimiento o productividad. Los más comunes son los índices de sitio y de competencia.

La altura dominante (Hd) de un rodal, definida como el promedio de la Ht de los individuos de mayores dimensiones, no se ve afectada por condiciones de manejo, por tanto la Hd alcanzada por el rodal a una edad clave (generalmente 2/3 del turno de corta) se emplea como un indicador de productividad potencial (García 1988, 1994, 1998) y se define como índice de sitio (IS). El IS se estima mediante una familia de curvas que representan trayectorias de Hd con la edad (t). La expresión (2.1.1) corresponde a la forma generalmente utilizada, denominada ecuación de Chapman-Richards, en la que α_1 y α_2 son coeficientes a estimar, H_{max} denota la altura máxima y es la asíntota de cada curva que se constituye como IS si la edad base es la edad de turno de corta.

$$Hd = H_{max} \left(1 - e^{-\alpha_1 t}\right)^{1/\alpha_2} \quad (2.1.1)$$

La competencia se define como la interacción entre árboles que reduce la probabilidad

de sobrevivir, el crecimiento y la regeneración. Los índices de competencia miden entonces cómo el comportamiento del árbol se encuentra determinado por sus vecinos. Sun *et al.* (2019) utilizan una expresión de la competencia para incorporar al modelo de supervivencia y otra para el crecimiento; para la primera emplean la relativización (DR) del diámetro normal respecto al diámetro cuadrático medio (Dq) y en la segunda la función de distribución acumulada $F(j)_t$ (2.1.2).

$$DR_{it} = \frac{Dn_{it}}{Dq_t}; \quad (2.1.2)$$

$$F(j)_t = \frac{2j_t - 1}{2n_t}.$$

donde el DR del i -ésimo individuo a la edad t se denota como DR_{it} y es directamente proporcional al Dn e inversamente proporcional al diámetro cuadrático medio. En tanto $F(j)_t$ es la función de distribución acumulada propuesta por Poudel y Cao (2013) a la edad t , donde j enuncia la posición del árbol que resulta al ordenar los diámetros normales de menor a mayor y n es el número de árboles.

Funciones de mortalidad

La supervivencia, o en su defecto su complemento (la mortalidad), se mide como una variable discreta dicotómica (vivo o muerto, 1 ó 0) cuya distribución corresponde a una variable aleatoria Bernoulli. Modelar esta condición requiere ajustar una regresión logística, o Probit, en el marco de los modelos lineales generalizados. Para ello el parámetro de la distribución se denota como π_{it} y es la probabilidad de sobrevivir del i -ésimo árbol a la t -ésima edad, mientras que η corresponde al exponencial del predictor lineal cuya función de enlace κ es una combinación lineal de parámetros (β) asociados, mediante la matriz de incidencia \mathbf{X} , a características del individuo (*eg.*: Dn_{it}) y del rodal (*eg.*: índice de competencia (IC) y área basal (G)). La formulación general del modelo de supervivencia se expresa en (2.1.3).

$$Sup_{it} \sim Bernulli(\pi_{it});$$

$$\eta = e^{X\beta}; \quad (2.1.3)$$

$$\kappa = \log\left(\frac{\pi_{it}}{1-\pi_{it}}\right) = X\beta \propto f(Dn_{it}, IC_t, G_t, \dots),$$

entonces es posible pronosticar la probabilidad de supervivencia para el i -ésimo individuo a la edad t .

$$Probabilidad\ de\ sobrevivir \rightarrow E(Sup_{it}) = \pi_{it} = \frac{\eta_{it}}{1+\eta_{it}}. \quad (2.1.4)$$

El modelo de supervivencia o mortalidad se utiliza para establecer un valor umbral de probabilidad a partir del cual los árboles mueren o no. Si el individuo sobrevive se puede calcular/estimar el crecimiento del mismo.

Funciones de predicción de crecimiento

Pretzsch (2009) enuncia que las funciones de crecimiento, o de rendimiento, que describen los cambios en diámetro, altura, volumen y/u otras variables (individuales o en otra escala de detalle), pueden entenderse como un balance entre los efectos de ganancia (asimilación) y de pérdida (respiración). Entre las expresiones matemáticas generalmente utilizadas se encuentra la ecuación de Bertalanffy (1951), la cual expresa que los cambios en y respecto del diferencial en la edad son proporcionales a la diferencia entre asimilación y respiración. Bertalanffy encuentra que ambos componentes son proporcionales respecto a y , afectados a coeficientes alométricos (primera ley de la alometría), lo cual se formaliza en (2.1.5)

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \text{asimilación-respiración} = ay^{\alpha_1} - by^{\alpha_2} \quad (2.1.5)$$

donde a , b , α_1 y α_2 denotan los coeficientes de la ecuación diferencial cuya resolución se presenta en (2.1.6).

$$y = a' \left(1 - e^{-k \cdot t}\right)^3 \quad \text{con} \quad a' = \left(\frac{a}{b}\right)^3 \wedge k = \frac{b}{3} \quad (2.1.6)$$

La expresión (2.1.6) se conoce como función de rendimiento de Bertalanffy para la

variable y , la cual puede ajustarse directamente para construir el modelo de crecimiento o bien su expresión derivada que constituye específicamente la función de crecimiento (2.1.7)

$$\frac{\partial y}{\partial t} = y' = 3a'ke^{-kt} \left(1 - e^{-kt}\right)^2 \quad (2.1.7)$$

De forma similar, las expresiones en (2.1.8) corresponden a las denominadas funciones de rendimiento y crecimiento de Chapman-Richards [8a], Monomolecular [8b] y modelo BOD [8c].

$$y = \alpha_1 \left(1 - e^{-\alpha_2 t}\right)^{\alpha_3} \quad \xrightarrow{\partial t} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 e^{-\alpha_2 t} \left(1 - e^{-\alpha_2 t}\right)^{\alpha_3} \quad [8a]$$

$$y = \alpha_1 \left(1 - \alpha_3 e^{-\alpha_2 t}\right) \quad \xrightarrow{\partial t} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 e^{-\alpha_2 t} \quad [8b] \quad (2.1.8)$$

$$y = \alpha_1 \left(1 - e^{-t e^{\alpha_2}}\right) \quad \xrightarrow{\partial t} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \alpha_1 e^{\alpha_2} e^{-t e^{\alpha_2}} \quad [8c]$$

Para cada expresión presentada en (2.1.8) los α_i son coeficientes característicos de cada ecuación. Estos son especificados como combinaciones lineales, o no, de los índices anteriormente presentados. El último enunciado se aprecia mejor en la expresión (2.1.9) que denota la función de crecimiento empleada por Crecente-Campo (2008):

$$s' = \alpha_1 \alpha_2 e^{-(\alpha_3 + \alpha_4 t)} \quad \because \quad \alpha_1 = a_1 D n^{a_2}, \quad \alpha_2 = G^{a_3}, \quad \alpha_3 = a_4 IC + a_5 IS \quad (2.1.9)$$

donde los α y a corresponden a coeficientes, s' es el crecimiento de la variable involucrada (sección normal o altura) y las restantes expresiones se definieron anteriormente. La función ajustada por Crecente-Campo (2.1.9) es aproximadamente equivalente a la forma derivada de la función Monomolecular (ver [8b] en (2.1.8)), si se considerase que alguno de los términos multiplicativos asume valor 1.

Funciones de reclutamiento

Finalmente, el modelo se completa con una ecuación que determina la cantidad de individuos que se incorporan a la masa para el próximo período de crecimiento. Esta función, denominada de reclutamiento, suele expresarse como una función lineal la cual debe estimarse de acuerdo a la distribución *Poisson* (λ). El predictor lineal, tal como se presentó

en el modelo de mortalidad, es una función del renoval, el número de árboles semilleros, la competencia, el índice de sitio, entre otros.

- **Estados de Crecimiento**

García (1994) propone utilizar la Teoría de Sistemas como marco conceptual o de enfoque para formular modelos de crecimiento. La idea base bajo este enfoque es poder caracterizar el estado del sistema (forestal en este caso) en cualquier instante del tiempo sin depender del tiempo pasado inmediato. Para poder formalizar esta idea definimos \mathbf{x} como el vector de estado que contiene las características y variables de interés a la edad t , \mathbf{u} el correspondiente al de entradas, covariables o factores observados (tratamientos silvícolas, IS u otro/s) e \mathbf{y} al de las salidas (eg. volumen total). Entonces, el comportamiento del sistema queda totalmente descripto como s en (2.1.10), donde f es la función de transición puntual entre la edad de inicio (t_0) y t . Las salidas se obtienen de aplicar la función $g(\cdot)$ al vector de estado \mathbf{x} que resulta de la función de transición.

$$s = \begin{cases} \mathbf{x}(t) = f(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}, t - t_0) \\ \mathbf{y} = g[\mathbf{x}(t)] \end{cases} \quad (2.1.10)$$

Fijando $t_0 = 0$, e integrando se obtiene la función de transición global F , tal que s se puede escribir de acuerdo a (2.1.11), donde θ es un vector de parámetros desconocidos a estimar tal como los coeficientes de la función de rendimiento de Bertalanffy y/u otros.

$$s = \begin{cases} \mathbf{x}(t) = \int_{t_0}^t f(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{u}, t - t_0) dt = F(t, \mathbf{u}, \theta) \\ \mathbf{y} = g[\mathbf{x}(t)] = g[F(t, \mathbf{u}, \theta)] \end{cases} \quad (2.1.11)$$

A fin de ejemplificar, consideremos que el vector de estados se compone por el Dn , la Ht y el número de árboles por unidad de superficie (N), en tanto el de salida por el volumen total (V). El modelo puede formularse mediante las funciones de transición puntuales tal como se presenta en (2.1.12)

$$s = \begin{cases} \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Dn}{\partial t} \\ \frac{\partial Ht}{\partial t} \\ \frac{\partial N}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(Dn, N) \\ f_2(Ht, Dn, N) \\ f_3(N, Dn) \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} = V = g[\mathbf{x}(t)] \end{cases} \quad (2.1.12)$$

o bien mediante las funciones de transición globales que resulta en (2.1.13) para la cual $\boldsymbol{\theta}$ es un vector de parámetros que puede plantearse como una función en \mathbf{u} .

$$s = \begin{cases} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \int_{t_0}^t f_1(Dn, N) dt \\ \int_{t_0}^t f_2(Ht, Dn, N) dt \\ \int_{t_0}^t f_3(N, Dn) dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Dn = F_1(t, N, \boldsymbol{\theta}) \\ Ht = F_2(t, N, Dn, \boldsymbol{\theta}) \\ N = F_3(t, Dn, \boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \\ \mathbf{y} = V = g[\mathbf{x}(t)] \end{cases} \quad (2.1.13)$$

Si s corresponde a un modelo individual, entonces la función de salida puede plantearse como:

$$V = g[\mathbf{x}(t)] = \int_{h=0}^{h=Ht_i} st_i dh = \frac{\pi}{4} \int_0^{Ht_i} f(d_i^2 \sim h) dh = c \int_h f(h) dh \quad (2.1.14)$$

La función que describe el comportamiento del cuadrado del diámetro, d , a lo largo del fuste ($f(h)$), se plantea generalmente como una función del Dn y Ht . Esta es una forma de expresar una función de ahusamiento.

2.2. Funciones de ahusamiento

Se define como función de ahusamiento a la expresión matemática que permite obtener en cualquier posición h del fuste el valor de radio (r), diámetro (d) o sección transversal (st). Las primeras funciones de ahusamiento corresponden a aquellas que

describen todo el perfil mediante una ecuación simple tal como la de Munro (1966) o la de Kozak *et al.* (1969). Max y Burkhardt (1976) introducen la modelización del perfil del fuste mediante la utilización de funciones segmentadas; específicas para determinados segmentos con puntos de empalme (equivalente al concepto de “spline”). Posteriormente se desarrollaron modelos más complejos que describen la forma del tronco afectando una base continua a un exponente de forma variable (Kozak 1988; Bi 2000; Kozak 2004).

El modelo de Kozak (1988, 2004) establece que la relación entre el i -ésimo diámetro (d_i) y el de referencia (D_n) es función de una medida de proporción de la altura afectada a un exponente, a la vez que dicho exponente es función de la i -ésima altura respecto a la altura total. El enfoque de Kozak permite generar una función continua que describe la variación del diámetro a lo largo de todo el fuste mediante un exponente de forma variable que compensa la parte neloide, paraboloides y cónica del tronco (Figura 1). Bi (2000) aplica un enfoque equivalente al de Kozak (1988). En su modelo la base de la función corresponde a una ecuación trigonométrica de la proporción del volumen y la especificación del exponente se obtiene por inspección mediante expansiones de Fourier. La ventaja respecto al de Kozak es la flexibilidad y precisión del modelo (Fassola *et al.* 2007). Como principales dificultades identificadas se indican la imposibilidad de integración y del cálculo directo de alturas, en consecuencia, tanto volúmenes como alturas, se deben estimar indirectamente mediante métodos iterativos.

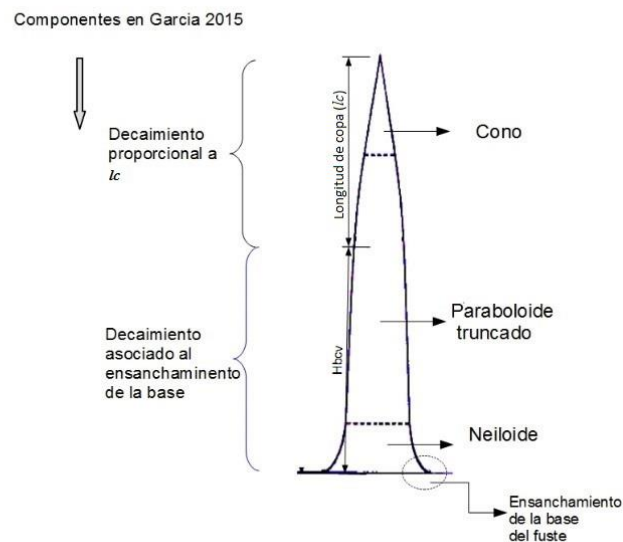


Figura 1. Representación del fuste de un árbol, aproximación mediante sólidos geométricos

y componentes de acuerdo al modelo de García (2015), lc : longitud de copa y $Hbcv$: altura de la base de la copa viva.

Con la finalidad de modelar la variación temporal de la forma del fuste, Muhairwe (1993, 1999) desarrolló el concepto de funciones ahusamiento dinámicas. A partir de ello diferenciamos las funciones estáticas de las dinámicas. Las “estáticas”, dentro de las que se encuentran las de Kozak y Bi, modelan la variación del diámetro a lo largo del fuste sin considerar el tiempo. Las dinámicas determinan esta variación en función del tiempo o la edad. En el marco de este último enfoque, García (2015) desarrolla su modelo de la forma del árbol y utiliza coeficientes que le permiten vincular los fundamentos mecanicistas de Metzger de 1893 con los fisiológicos enunciados por Pressler en 1864. El modelo de García (2015) relaciona dos componentes (Figura 1), uno asociado a la longitud de la copa (componente fisiológico) y otro al ensanchamiento en la base del fuste (mecanicista), mediante funciones de decaimiento (García 2008) que describen la reducción del diámetro o sección a lo largo del fuste como funciones de dichos componentes. El componente mecanicista tiende a cero cuando la longitud de fuste tiende a la altura de la base de copa viva ($Hbcv$) y el restante cuando se tiende al máximo de longitud de copa (lc). El autor considera a la proporción de copa, $lc/Hbcv$, como una constante, lo cual podría no ser satisfactorio en plantaciones de rápido crecimiento con una elevada dinámica de competencia.

2.2.1. Formulación de funciones de ahusamiento

Independientemente de la base teórica, mecanicista o fisiológica, en la que se sustente la descripción matemática de la forma del fuste, ésta es una relación entre el cambio del diámetro, u otra de las dimensiones expresadas en la definición, respecto a un valor base y a alguna medida de la variación en la altura del fuste. En la ecuación (2.2.1) se formaliza esta idea, donde d_{hi} es el diámetro medido en la h -ésima altura en el árbol i , D_i corresponde a un diámetro de referencia (generalmente D_n) en el árbol i -ésimo y x_h representa alguna medida de distancia en referencia a la base o al ápice del árbol.

$$\frac{d_{hi}}{D_i} \propto x_h \quad (2.2.1)$$

Las primeras expresiones para modelar esta relación corresponden a modelos lineales, tal como en el caso de la ecuación propuesta por Munro (1966)

$$\left(\frac{d_{hi}}{Dn_i}\right)^2 \approx \beta_1 - \beta_2 \left(\frac{h}{Ht_i - 1,3}\right) \quad (2.2.2)$$

o bien la de Kozak *et al.* (1969)

$$\left(\frac{d_{hi}}{Dn_i}\right)^2 \approx \beta \cdot \left(1 - \frac{h}{Ht_i}\right)^2. \quad (2.2.3)$$

En las ecuaciones expresadas en (2.2.2) y (2.2.3) los coeficientes a estimar corresponden a β , β_1 y β_2 .

Estos modelos iniciales presentan serias dificultades para describir el comportamiento del diámetro en las porciones del fuste en las que la forma geométrica deja de ser aproximadamente la de un paraboloide. En un intento de corregir este comportamiento los desarrollos posteriores incrementaron el orden de los polinomios o bien formularon ecuaciones segmentadas. Fischer *et al.* (2001) y Martinelli de Souza *et al.* (2012) son ejemplos de ajustes de la ecuación del polinomio de quinto grado (2.2.4), con β_1 a β_6 como coeficientes.

$$\frac{d_{hi}}{Dn_i} \approx \beta_1 + \beta_2 \cdot \frac{h}{Ht_i} + \beta_3 \cdot \left(\frac{h}{Ht_i}\right)^2 + \beta_4 \cdot \left(\frac{h}{Ht_i}\right)^3 + \beta_5 \cdot \left(\frac{h}{Ht_i}\right)^4 + \beta_6 \cdot \left(\frac{h}{Ht_i}\right)^5 \quad (2.2.4)$$

La expresión (2.2.5), en la que β_1, \dots, β_6 son coeficientes, denota al modelo segmentado propuesto por Max and Burkhart (1976), ampliamente utilizado (Gómez-García *et al.* 2016). En el mismo los autores modelan el ahusamiento del tronco mediante dos secciones que siguen formas polinómicas de segundo grado.

$$\left(\frac{d_h}{Dn_i}\right)^2 \approx \beta_1 \left(\frac{h}{Ht_i} - 1\right) + \beta_2 \left(\left(\frac{h}{Ht_i}\right)^2 - 1\right) + \beta_3 \left(\beta_5 - \frac{h}{Ht_i}\right)^2 I_1 + \beta_4 \left(\beta_6 - \frac{h}{Ht_i}\right)^2 I_2$$

$$\text{con } I_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{h}{Ht} \leq \beta_5, \\ 0 & \text{si } \frac{h}{Ht} > \beta_5 \end{cases} \quad \text{y } I_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{h}{Ht} \leq \beta_6, \\ 0 & \text{si } \frac{h}{Ht} > \beta_6. \end{cases} \quad (2.2.5)$$

Los modelos segmentados han recibido particular atención y se han desarrollado formas complejas como en Flewelling y Raynes (1993). Dichos autores definen un modelo con doce puntos de empalme y veintiséis parámetros a estimarse. De acuerdo a Muhairwe (1993), este complejo modelo no muestra mejoras sustanciales respecto a los modelos preexistentes.

2.2.1.1. Exponente variable

a. Derivación por inspección

Las funciones de ahusamiento de exponente variable se fundamentan en la idea expresada en (2.2.6), de acuerdo a la cual los diferentes valores que toma el exponente k determinan el diámetro acorde a los sólidos geométricos presentados en la Figura (1). Así, si k es 1 entonces el sólido es un paraboloide, cuando es 3 se forma un cono o bien se aproxima a un neloide si el valor que toma es 2.

$$d_{hi} \approx D_i x^{(r/2)} \equiv D_i x^{(1/k)} \quad (2.2.6)$$

El diámetro de referencia D en el árbol i en (2.2.6) comúnmente es el Dn que se mide a 1,3 m de altura. Para asegurar que la relación sea consistente la forma de x debe ser igual a 1 cuando h es 1,3 m. Ello se consigue expresando (2.2.6) como (2.2.7)

$$\frac{d_{hi}}{Dn_i} \equiv x^{(1/k)} \rightarrow \left(\frac{d_{hi}}{Dn_i}\right)^k = \left(\frac{Ht_i - h}{Ht_i - 1,3}\right) \quad (2.2.7)$$

Newnham (1988, 1992) obtiene el exponente de forma mediante la linealización de la igualdad expresada en la parte derecha de la expresión (2.2.7), para ello utiliza el logaritmo natural y explora por inspección diferentes formas polinómicas de k . La forma propuesta por

el autor se presenta en (2.2.8), β_i ($i=0,1,2,3$) denotan los coeficientes a estimar.

$$k \cong \beta_0 + \beta_1 \frac{Dn}{Ht} + \beta_2 \frac{Ht-h}{Ht-1,3} \left(\frac{Dn}{Ht} \right)^2 + \beta_3 h^{\beta_4} \quad (2.2.8)$$

El desarrollo de Kozak (1988, 2004) y el de Muhairwe (1993) se basan en el enfoque empleado por Newnham. Los siguientes enunciados describen el desarrollo de Kozak (1988), las restantes son simplemente modificaciones. En la ecuación (2.2.9) se denota la expresión en la que se fundamenta el desarrollo de Kozak (1988) que consiste en reformular la expresión de Newnham (2.2.7).

$$\frac{d_{hi}}{DI_i} \approx x^k, \text{ tal que } x = \frac{1 - \sqrt{h/Ht_i}}{1 - \sqrt{pc}} \quad (2.2.9)$$

donde DI_i denota el diámetro normal sin corteza del árbol i y pc es una constante de cada especie que determina el punto de inflexión en el cual ocurre el cambio desde la forma neloide al paraboloides. La expresión de x asegura que la curva pasa por el diámetro de referencia y se anula cuando se llega a la altura máxima. En tanto la forma de k que obtiene Kozak por inspección corresponde a (2.2.10).

$$k \approx \beta_1 \left(\frac{h}{Ht_i} \right)^2 + \beta_2 \ln \left(\frac{h}{Ht_i} + 0,001 \right) + \beta_3 \sqrt{\frac{h}{Ht_i}} + \beta_4 e^{\left(\frac{h}{Ht_i} \right)} + \beta_5 \frac{Dn}{Ht_i} \quad (2.2.10)$$

Como DI_i no se puede medir, en árboles en pie, se debe estimar mediante (2.2.11); reagrupando los términos y reenumerando los coeficientes β la ecuación propuesta por el mencionado autor queda expresada en (2.2.12).

$$DI_i \approx \beta_1 Dn_i^{\beta_2} \beta_3^{Dn_i} \quad (2.2.11)$$

$$d_{h(i)} \approx \beta_1 Dn_i^{\beta_2} \beta_3^{Dn_i} x^{\left(\beta_4 \left(\frac{h}{Ht_i} \right)^2 + \beta_5 \ln \left(\frac{h}{Ht_i} + 0,001 \right) + \beta_6 \sqrt{\frac{h}{Ht_i}} + \beta_7 e^{\left(\frac{h}{Ht_i} \right)} + \beta_8 \frac{Dn_i}{Ht_i} \right)} \quad (2.2.12)$$

Kozak (2004) genera variantes de su modelo de exponente de forma variable presentado en los apartados previos. De acuerdo al mismo autor y a Rojo *et al.* (2005), el modelo más promisorio corresponde a la segunda variante, en la que se redefine tanto la base (2.2.13) como la función que estima DI (2.2.14) y el exponente (2.2.15). Agrupando los

términos se puede construir la función de ahusamiento tal como se realizó en la anterior.

$$\frac{d_h}{DI_i} \approx x^k \quad / : \quad x = \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{h}{Ht_i}}}{1 - \sqrt[3]{pc}} \quad (2.2.13)$$

$$DI_i \approx \beta_1 Dn_i^{\beta_2} Ht_i^{\beta_3} \quad (2.2.14)$$

$$k \equiv \beta_4 \left(\frac{h}{Ht_i}\right)^4 + \beta_5 e^{-\left(\frac{Dn_i}{Ht_i}\right)} + \beta_6 \left[\frac{1 - \left(\frac{h}{Ht_i}\right)^{1/3}}{1 - p^{1/3}} \right]^{0.1} + \frac{\beta_7}{Dn_i} + \beta_8 Ht_i \left[1 - \left(\frac{h}{Ht_i}\right)^{1/3} \right] + \beta_9 \left[\frac{1 - \left(\frac{h}{Ht_i}\right)^{1/3}}{1 - p^{1/3}} \right]. \quad (2.2.15)$$

b. El modelo trigonométrico de Bi

En los trabajos de Bi (2000) y de Bi y Long (2001) se propone un modelo de ahusamiento de exponente variable trigonométrico. En éstos se construye la base a partir de una ecuación trigonométrica de la proporción de volumen conforme a la geometría del tronco del árbol. Para ello se define a R_h como la razón entre el volumen acumulado a una determinada altura h respecto al volumen total del árbol, V_i . De forma equivalente, R_d corresponde al volumen relativo para un diámetro específico respecto a V_i (ver 2.2.16).

$$\left. \begin{aligned} R_h &= f_1 \left(\frac{h}{Ht_i} \right) \\ R_d &= f_2 \left(\frac{d_h}{DI_i} \right) \end{aligned} \right\} \rightarrow f_1 = f_2 \rightarrow \frac{d_h}{DI_i} = f_2^{-1} \left[f_1 \left(\frac{h}{Ht_i} \right) \right] \quad (2.2.16)$$

El volumen relativo que se obtiene especializando f_l a la altura normal (1,3 m) se enuncia como R_n , con el mismo se construye la equivalencia que permite derivar la expresión de d_h tal como se formaliza en la expresión (2.2.17).

$$f_1 \left(\frac{1,3}{Ht_i} \right) = R_n \quad \therefore \quad R_d = R_n^{\left(\frac{d_h}{DI_i} \right)^{1/k}} \Rightarrow \frac{d_h}{DI_i} \approx \left(\frac{\ln(R_h)}{\ln(R_n)} \right)^k \quad (2.2.17)$$

Bi (2000) especifica la base mediante el modelo simplificado que propone para estimar R_h (Bi, 1999). Esta simplificación consiste en considerar solo el primer término de la productiva en (2.2.18).

$$R_h = \prod_{i=1}^4 \sin \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{h}{Ht_i} \right)^{(\frac{1}{4})} \right] \Rightarrow d_{h(i)} \approx DI_i \left[\frac{\ln \left(\sin \left(\frac{\pi h}{2Ht_i} \right) \right)}{\ln \left(\sin \left(\frac{\pi 1,3}{2Ht_i} \right) \right)} \right]^k \quad (2.2.18)$$

El autor observó que al considerar constante al exponente los residuales de la regresión linealizada mediante el logaritmo natural presenta patrones cíclicos, por ello expresa a dicho exponente como una expansión de Fourier que se denota en (2.2.19), donde los primeros tres coeficientes (β) modelan la variación dentro del fuste del árbol y los restantes la variabilidad entre individuos (Bi 2000).

$$k = \beta_0 + \beta_1 \sin \left(\frac{\pi h}{2Ht_i} \right) + \beta_2 \cos \left(\frac{3\pi h}{2Ht_i} \right) + \beta_3 \frac{Ht_i}{h} \sin \left(\frac{\pi h}{2Ht_i} \right) + \beta_4 Dn_i + \beta_5 \frac{h}{Ht_i} \sqrt{Dn_i} + \beta_6 \frac{h}{\sqrt{Ht_i}} \quad (2.2.19)$$

Reemplazando k en (2.2.18) por la expresión denotada en (2.2.19) se obtiene el modelo propuesto por Bi. Los argumentos de las funciones trigonométricas de Bi se expresan en radianes.

2.2.1.2. Modelos dinámicos

Muhairwe (1993) agrupa en dos enfoques las posibles estrategias de modelización del perfil del fuste, el primero agrupa las expresiones estáticas y el segundo las dinámicas. Las expresiones estáticas, tales como la de Kozak (1998) y la de Bi (2000), no modelan la variación temporal de la forma del fuste, en tanto que las funciones dinámicas permiten absorber las variaciones temporales en la expresión matemática del ahusamiento del fuste en base a supuestos muy fuertes (tal como que la proporción de copa viva se mantiene constante).

La propuesta de Muhairwe (1993) consiste en reformular el modelo de Kozak (1988) mediante la incorporación de covariables que absorban la variabilidad temporal, en el término multiplicativo, en la base y en el exponente del mencionado modelo que se presentó en (2.2.12). En consecuencia, el autor expresa el diámetro a la h -ésima altura del i -ésimo árbol en la edad t como:

$$d_{hii} = \beta_1 Dn_{it}^{\beta_1} \beta_2^{Dn_{it}} x'^k,$$

$$\text{con } x' = \frac{1 - \sqrt{\hat{z}_{ht}}}{1 - \sqrt{pc}} \quad (2.2.20)$$

$$y \quad k' = \beta_3 \hat{z}_{ht}^2 + \beta_4 \sqrt{\hat{z}_{ht}} + \beta_5 \frac{Dn_{it}}{Ht_{it}} + \frac{\beta_6}{t_i} + \beta_7 Dq_{50k} + \frac{\beta_8}{Ht_{it}} + \frac{\beta_9}{h(i) + 0,001}$$

En la expresión (2.2.20) se presenta la formulación planteada por Muhairwe (1993), cuyos coeficientes se denotan con β y las covariables empleadas corresponden a:

- \hat{z}_{ht} es una función logística que predice la altura proporcional de corte y que emplea como covariable a la altura de corte h y Ht_{it} ,
- Ht_{it} denota la estimación de la altura total del árbol i a la edad t para la cual se utiliza una función del índice de sitio y de la edad,
- Dn_{it} corresponde al Dn estimado para el i -ésimo árbol a la edad t mediante una función cuyas covariables corresponden al IS , t , Ht_{it} y Dq_{50k} ; este último corresponde a la estimación del diámetro cuadrático medio de la parcela k a la edad de 50 años.

- **Modelo de ahusamiento dinámico de García (2015)**

García (2015) formula un modelo de ahusamiento basado en la generalización de funciones de crecimiento que el mismo autor desarrolla (García, 2005). La utilización de dichas funciones en la derivación del modelo determina el carácter dinámico de la función propuesta por el autor; conforme a la definición de Muhairwe (1993, 1999). Esta función modela la variación de la sección transversal (st) a lo largo del fuste de acuerdo al mencionado enfoque y en su formulación matemática une las dos corrientes teóricas mencionadas: a) mecanicista, que atribuye la forma del fuste al resultado de las fuerzas del viento y del peso de la copa, y b) fisiológica, que enuncia que la proporción de tejido fotosintético determina la cantidad de tejido conductivo y de ello resulta el fuste.

La formulación matemática en la que se basa García (2015) corresponde a la expresión (2.2.1), ya que las secciones transversales (st) son integraciones del diámetro. En consecuencia, a (2.2.1) se la puede plantear como (2.2.21) en la que Sn_i denota la sección

normal del correspondiente árbol i ,

$$\frac{d_h}{Dn_i} \equiv \frac{st_h}{Sn_i} \propto x_h. \quad (2.2.21)$$

García (2015) establece que, en la parte del fuste cubierto por copa, la i -ésima tasa de crecimiento (∂s_h) respecto al de altura (∂H_i) es proporcional a una función de decaimiento $\varphi(\cdot)$. La función φ es directamente proporcional a x si se cumple que dicha medida es menor o igual a la longitud de copa viva, formalmente

$$\frac{\partial st_h}{\partial H_i} \propto \varphi(x_h) = \varphi(Ht_i - h) \quad (2.2.22)$$

con

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x_h) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow c} \varphi(x_h) &= 1 \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

La porción de fuste libre de copa viva se considera proporcional a una función de decaimiento, $\eta(\cdot)$, dependiente de la distancia al suelo, h . En consecuencia la expresión en (2.2.22) puede reescribirse como en (2.2.24)

$$\frac{\partial st_h}{\partial H_i} \approx \beta_0 [\varphi(Ht_i - h) + \eta(h)] \quad (2.2.24)$$

La ecuación (2.2.24) expresa la tasa de crecimiento a una altura h como una aproximación lineal por tramos que depende de la longitud de copa viva ($\varphi(\cdot)$), del ensanchamiento en la base (función de decaimiento $\eta(\cdot)$) y de β_0 que corresponde al coeficiente asíntota específico para cada individuo. García (2015) obtiene la función de perfil de la sección transversal del fuste, $st(h, Ht)$, al integrar la ecuación (2.2.24) respecto a la altura H para una h específica, tal como se desarrolla en (2.2.25).

$$\begin{aligned}
st_i(h, Ht_i) &\approx \beta_o \int_h^{Ht} [\varphi(Ht_i - h) + \eta(h)] dH \\
&\approx \beta_o \left[\int_0^{Ht-h} \varphi(Ht_i - h) dH + \int_0^{Ht-h} \eta(h) dH \right] \\
&\approx \beta_o \left[\int_0^{x_h} \varphi(x_h) dx_h + \int_0^{x_h} \eta(h) dx_h \right] \\
&\approx \beta_o \left[\int_0^{x_h} \varphi(x_h) dx_h + x_h \eta(h) \right] \\
&\approx \beta_o [\Phi(x_h) + x_h \eta(h)]
\end{aligned} \tag{2.2.25}$$

El resultado que se denota en la última línea del desarrollo (2.2.25) resulta de utilizar la equivalencia $\int_x \varphi(x) dx \equiv \Phi(x)$. Entonces, para un árbol de sección normal Sn , el modelo final de perfil de la sección transversal se expresa como la proporción de cambio de la función de perfil de la sección transversal respecto a la misma cuando es evaluada en $h = 1,3$. Esta relación se presenta en su expresión general en la ecuación (2.2.26).

$$st(h, Ht, Sn) = Sn \frac{st(h, Ht)}{st(1,3, Ht)} = Sn \frac{\Phi(Ht-h) + (Ht-h)\eta(h)}{\Phi(Ht-1,3) + (Ht-1,3)\eta(1,3)} \tag{2.2.26}$$

En el desarrollo del modelo propuesto por el autor, que se observa en (2.2.26), se compone básicamente de dos funciones de decaimiento que desarrolla García (2008). La expresión matemática de estas funciones se presenta en los siguientes apartados.

- **Modelado de Phi (φ)**

García (2015) postula que la función dependiente de la longitud de copa corresponde al modelo de Pressler, lo cual se expresa formalmente en (2.2.27)

$$\varphi(x) \approx \min \left\{ \frac{x}{\beta_1}, 1 \right\} = 1 - \max \left\{ 1 - \frac{x}{\beta_1}, 0 \right\} = 1 - \delta_{\beta_2} \left(\frac{x}{\beta_1} \right), \tag{2.2.27}$$

donde β_1 y β_2 denotan coeficientes, mientras que δ es la forma genérica de la familia de funciones de crecimiento (García, 2008) que se presenta en (2.2.28)

$$\delta_a(u) = \begin{cases} \frac{1}{1+u} & \text{si } a = -1 \\ (1-au)^{1/a} & \forall a \neq 0 \wedge a \neq -1 \\ e^{-u} & a = 0 \end{cases} \quad (2.2.28)$$

Tomando la expresión final del modelo de Pressler (2.2.27) y retomando la equivalencia $(\int_x \varphi(x) dx \equiv \phi(x))$ mediante la cual se llega al modelo general (2.2.25), es posible trabajar dicha equivalencia para encontrar la expresión matemática de esta componente. Formalmente:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int_x \varphi(x) dx \\ &= \int_x \left[1 - \delta_{\beta_2} \left(\frac{x}{\beta_1} \right) \right] dx \\ &= \begin{cases} x - \frac{\beta_1}{\beta_2 + 1} \left[1 - \delta_{\frac{\beta_2}{\beta_2 + 1}} \left(\frac{\beta_2 + 1}{\beta_1} x \right) \right]; & \beta_2 \neq -1 \\ x - \beta_1 \ln \left(\frac{x}{\beta_1} + 1 \right); & \beta_2 = -1 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.2.29)$$

Especificaciones más detalladas del modelo de decaimiento expresado se pueden formular especificando convenientemente la función δ .

- **Modelado de eta (η)**

La componente dependiente de la distancia al suelo corresponde a una función que describe cómo el incremento de la sección transversal del fuste decae con el incremento de la distancia al suelo. Claramente este comportamiento puede ser modelado por una función de decaimiento δ en h , de forma equivalente al componente del modelo que depende de la longitud de copa viva; en este caso δ es escalable en β_3 y con coeficientes de forma β_4 y β_5

$$\eta(h) = \beta_3 \cdot \delta_{\beta_5} \left(\frac{h}{\beta_4} \right) = \begin{cases} \beta_3 \left(1 - \frac{\beta_5}{\beta_4} h \right)^{1/\beta_5} & \text{si } \beta_5 \neq 0 \text{ ó } \beta_5 \neq -1 \\ \beta_3 e^{-h/\beta_4} & \text{si } \beta_5 = 0 \\ \beta_3 \frac{1}{1 + h/\beta_4} & \text{si } \beta_5 = -1 \end{cases} \quad (2.2.30)$$

Finalmente la función de ahusamiento de la sección transversal se obtiene reemplazando convenientemente en (2.2.26) las expresiones generalizadas de las funciones por sus especificaciones expresadas en (2.2.29) y (2.2.30).

2.3. Estimación

Una vez formulado un modelo de crecimiento o algún componente de éste, como las funciones de ahusamiento, quedan definidos y expresados parámetros desconocidos que deben ser estimados. En los apartados siguientes se describen los enfoques comúnmente empleados para ello. Consideraremos la expresión general

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{e}, \quad (2.3.1)$$

donde \mathbf{y} , $\boldsymbol{\alpha}$ y \mathbf{e} denotan los respectivos vectores de n observaciones, p parámetros y n errores, en tanto que $\mathbf{f}(\boldsymbol{\alpha}) = (f_1(\boldsymbol{\alpha}), f_2(\boldsymbol{\alpha}), \dots, f_n(\boldsymbol{\alpha}))' = (f_1(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\alpha}), f_2(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\alpha}), \dots, f_n(\mathbf{x}_n, \boldsymbol{\alpha}))'$, tal que f es una función conocida no lineal en sus parámetros $\boldsymbol{\alpha}$ y \mathbf{x} corresponde al vector de covariables. El vector de observaciones \mathbf{y} es de naturaleza aleatoria, tal que sobre la función de densidad de probabilidades del mismo, $f(\mathbf{y})$, se realizan los supuestos que determinan la correspondencia con los métodos de estimación.

La estimación se centra en encontrar $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ para el cual se le asigna, a priori o no, según sea el enfoque bayesiano o frecuentista, determinada función de densidad de probabilidades $p()$, tal que dicha estimación resulta insesgada y de mínima variancia (Rao, 1992)

$$\int \hat{\boldsymbol{\alpha}} p(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}' = \boldsymbol{\alpha} \quad (2.3.2)$$

y

$$\int (\hat{\boldsymbol{\alpha}} - \boldsymbol{\alpha})^2 p(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}' \text{ es mínimo.} \quad (2.3.3)$$

2.3.1. Estimador de Mínimos Cuadrados No Lineales (NLS)

El estimador de mínimos cuadrados no lineales ($\hat{\alpha}_{NLS}$) es aquel que minimiza la suma de cuadrados del error (2.3.4), bajo supuestos de regularidad de la distribución de los errores ($\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$) y variancia (σ^2) conocida.

$$RSS(\alpha) = [\mathbf{y} - \mathbf{f}(\alpha)]' [\mathbf{y} - \mathbf{f}(\alpha)] = \|\mathbf{y} - \mathbf{f}(\alpha)\|^2 \quad (2.3.4)$$

Bajo las condiciones de regularidad, $\hat{\alpha}_{NLS}$ tiene distribución asintóticamente normal. Dado que $f()$ es continua y diferenciable respecto de α , entonces el estimador $\hat{\alpha}_{NLS}$ es aquel que satisface que la derivada de RSS respecto al vector de parámetros es nula al especializarse en dicho estimador, formalmente:

$$\left. \frac{\partial RSS(\alpha)}{\partial \alpha'} \right|_{\alpha = \hat{\alpha}_{NLS}} = 0 \quad (2.3.5)$$

La fórmula (2.3.5) permite llegar a la expresión (2.3.6) mediante la cual se derivan las ecuaciones normales del modelo no lineal que formalmente se denotan en (2.3.7), donde $\hat{\mathbf{F}}'$ corresponde a la matriz de primeras derivadas de f , respecto al vector de parámetros, especializadas en $\hat{\alpha}_{NLS}$.

$$(\mathbf{y} - \mathbf{f}(\alpha)) \cdot \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\alpha)}{\partial \alpha'} \right|_{\alpha = \hat{\alpha}_{NLS}} = 0 \quad (2.3.6)$$

$$\hat{\mathbf{F}}' \mathbf{y} = \hat{\mathbf{F}}' \mathbf{f}(\hat{\alpha}_{NLS}) \quad (2.3.7)$$

Las ecuaciones normales (2.3.7) solo presentan solución directa en el caso de que $f()$ sea lineal en sus parámetros; cuando esto no ocurre la solución se obtiene mediante aproximación numérica que surge de implementar el algoritmo (2.3.8) en el que w indica el orden de la iteración.

$$\hat{\alpha}_{NLS}^{(w+1)} = \hat{\alpha}_{NLS}^{(w)} + \left(\hat{\mathbf{F}}^{(w)'} \hat{\mathbf{F}}^{(w)} \right)^{-1} \hat{\mathbf{F}}^{(w)'} [\mathbf{y} - \mathbf{f}(\hat{\alpha}_{NLS}^{(w)})] \quad (2.3.8)$$

2.3.2. Procesos de dependencia del error

Los modelos biométricos, tal como las funciones de ahusamiento del fuste de árboles,

se ajustan mediante mediciones que se realizan secuencialmente a través de una dimensión temporal o espacial, lo cual determina la dependencia entre las mismas. En consecuencia, el error dentro del i -ésimo individuo en la posición j -ésima se puede expresar como una regresión en la variable aleatoria u mediante los coeficientes autorregresivos ψ .

$$e_{ij} = u_{ij} + \psi_1 u_{i,j-1} + \psi_2 u_{i,j-2} + \dots = \sum_{\ell} \psi_{\ell} u_{i,j-\ell} \quad (2.3.9)$$

La expresión (2.3.9) corresponde al modelo general de dependencia lineal de los errores; en la misma la separación entre observaciones se denota con ℓ y se denomina *lag*.

Bajo condiciones de regularidad y estacionalidad de primer grado se cumple que: a) las variables u_{ij} se distribuyen idéntica, independiente y normalmente con media cero y variancia común σ_u^2 y b) los coeficientes asumen valores finitos, tal que $\sum_{\ell} |\psi_{\ell}| < \infty$. Seber y Wild (2003) enuncian que el cumplimiento de estos supuestos garantiza que todos los momentos existan y, en consecuencia, es factible obtener la expresión general de la correlación

$$\text{corr}(e_{ij}, e_{ij+\ell}) = \frac{\text{cov}(e_{ij}, e_{ij+\ell})}{\text{var}(e_{ij})} = \frac{\cancel{\sigma_u^2} \sum_{\ell} \psi_j \psi_{j+\ell}}{\cancel{\sigma_u^2} \sum_{\ell} \psi_{\ell}^2}. \quad (2.3.10)$$

La expresión (2.3.10) de Seber y Wild (2003) coincide con la brindada por Pinheiro y Bates (2000) y se deriva de la expresión (2.3.9) que nos permite encontrar fácilmente los términos de variancia y covariancia bajo el supuesto de estacionalidad. Pourahmadi (1999) denota al modelo general en términos matriciales, equivalente al enunciado anteriormente. Para ello nótese que (2.3.9) puede expresarse como $\mathbf{e} = \mathbf{L}\mathbf{u}$, donde \mathbf{L} es la matriz triangular inferior de coeficientes regresivos generalizados que determina que la matriz de covarianzas se pueda expresar como $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}' = \sigma_u^2 \mathbf{L}\mathbf{L}'$.

La especificación de los coeficientes y covariables del modelo general generan diferentes estructuras de covarianzas generalmente estudiadas en modelos longitudinales (Seber y Wild 2003; Pourahmadi 1999, 2000). Estos se pueden generalizar en dos procesos: a) autorregresivos y b) de media móvil.

Un *proceso autorregresivo* es aquel en el cual la observación actual queda expresada como una función lineal en las observaciones previas más el efecto aleatorio homocedástico

u , en consecuencia el modelo general asume la forma

$$e_j = \phi_1 e_{j-1} + \phi_2 e_{j-2} + \cdots + \phi_{q_1} e_{j-q_1} + u_j. \quad (2.3.11)$$

El orden del proceso se encuentra determinado por el valor que asume q_1 que corresponde al número de observaciones precedentes incluidas en el modelo de dependencia, en consecuencia el orden del proceso determina la velocidad con la que la dependencia entre observaciones decae y el proceso se denomina autorregresivo de orden q_1 ($AR(q_1)$).

Una forma comúnmente empleada en la representación del modelo autorregresivo general es mediante el operador B , que se define puntualmente como $Be_j = e_{j-1}$ o bien en su expresión generalizada $B^q e_j = e_{j-q}$. En función de dicho operador el modelo se expresa como:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_{q_1} B^{q_1}) e_j = \phi(B) e_j = u_j \Rightarrow e_j = \phi^{-1}(B) u_j \quad (2.3.12)$$

La función de covariancia en un proceso autorregresivo del error corresponde a una relación recurrente que se obtiene al multiplicar e_j con e_{j-l} y aplicar el operador esperanza, tal que la k -ésima covariancia γ se expresa

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \cdots + \phi_{q_1} \gamma_{k-q_1} \quad (2.3.13)$$

La función de correlación resulta de dividir la k -ésima covariancia, (2.3.13), con la variancia común γ_0 , de lo cual se obtiene

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \cdots + \phi_{q_1} \rho_{k-q_1}, \quad (2.3.14)$$

y mediante el operador B se expresa $\phi(B)\rho_k = 0$, que permite obtener la expresión alternativa como una función lineal en las raíces (G) de $\phi(B)$, tal que

$$\rho_k = A_1 G_1^k + \cdots + A_{q_1} G_{q_1}^k \quad (2.3.15)$$

Otra alternativa es emplear las ecuaciones de Yule-Walker que denotan los parámetros autorregresivos en términos de las autocorrelaciones. Considerando el subíndice $k=1, 2, \dots, q_1$ estas ecuaciones expresan las correlaciones recursivamente

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \cdots + \phi_{q_1} \rho_{q_1-1} \\
\rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \cdots + \phi_{q_1} \rho_{q_1-2} \\
&\vdots \quad \vdots \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \vdots \\
\rho_{q_1} &= \phi_1 \rho_{q_1-1} + \phi_2 \rho_{q_1-2} + \cdots + \phi_{q_1}
\end{aligned}$$

y su expresión matricial permite escribir la solución como

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}\boldsymbol{\phi} \Rightarrow \boldsymbol{\phi} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{p} \quad (2.3.16)$$

Por otra parte la variancia del proceso se obtiene de aplicar dicho operador en la expresión (2.3.12), de lo cual resulta

$$\sigma_e^2 = \frac{\sigma_u^2}{1 - \rho_1 \phi_1 - \cdots - \rho_{q_1} \phi_{q_1}} \quad (2.3.17)$$

Un *proceso de media móvil* es aquel en el cual solo los primeros q_2 ponderadores del modelo general son distintos de cero, tal que el modelo queda definido como:

$$\begin{aligned}
e_j &= u_j - \xi_1 u_{j-1} - \xi_2 u_{j-2} - \cdots - \xi_{q_2} u_{j-q_2} \\
&= (1 - \xi_1 B - \xi_2 B^2 - \cdots - \xi_{q_2} B^{q_2}) u_j \\
&= \xi(B) u_j
\end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Box y Jenkins (1976) expresan formalmente los componentes del proceso. De acuerdo a estos autores la variancia del proceso corresponde a

$$\sigma_e^2 = (1 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_{q_2}^2) \sigma_u^2,$$

en tanto la covariancia

$$\gamma_k = \begin{cases} (-\xi_k + \xi_1 \xi_{k+1} + \xi_2 \xi_{k+2} + \cdots + \xi_{q_2-k} \xi_{q_2}) \sigma_u^2, & \text{si } k = 1, 2, \dots, q_2 \\ 0, & \text{si } k > q_2. \end{cases}$$

Entonces la función de autocorrelación corresponde a

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{\xi_k + \xi_1 \xi_{k-1} + \dots + \xi_{k-q_2} \xi_{q_2}}{1 - \xi_1^2 - \dots - \xi_{q_2}^2}, & k = 1, \dots, q_2 \\ 0, & k > q_2 \end{cases} \quad (2.3.19)$$

La función de autocorrelación permite observar que este proceso genera matrices de correlación en la que los elementos son distintos de cero solo si encuentran en las diagonales de orden menor o igual al orden del proceso (q_2).

Los dos procesos descritos en los párrafos precedentes pueden presentarse de forma conjunta, lo cual genera estructuras de correlación conocidas como autorregresivas de media móvil de orden q_1 y q_2 , ARMA (q_1, q_2). En Box y Jenkins (1976), Pinheiro y Bates (2000) y Seber y Wild (2003) se enuncian las estructuras generales de estos procesos, a la vez que se denota que a mayores grados de los procesos se incrementan los problemas de identificabilidad de los parámetros y por tanto los correspondientes a la estimabilidad de los mismos.

- **Estimador de Mínimos Cuadrados No Lineales Generalizados Factibles (FGNLS)**

El vector de observaciones en el modelo (2.3.1) puede expresarse como un vector particionado $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_i, \dots, \mathbf{y}_n)'$. Las m observaciones en el vector del i -ésimo individuo se encuentran autocorrelacionadas, lo cual determina que el vector de errores asociados sigue una distribución normal $\mathbf{e}_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_i)$. La matriz de varianzas y covarianzas del error se supone conocida y que admite inversa, tal que $\Sigma^{-1} = \sigma_u^2 \mathbf{L}\mathbf{L}'$. En esta expresión \mathbf{L} es la matriz triangular inferior cuyas entradas no nulas y no redundantes corresponden a los coeficientes del modelo general de dependencia planteado en (2.3.9) (Pourahmadi 1999, 2000).

La función de verosimilitud corresponde a

$$-2L(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{L}_\psi, \sigma_u^2; \mathbf{y}) = \text{const} + n \log(\sigma_u^2) + \log |\Sigma| + \sum_i^n [\mathbf{y}_i - \mathbf{f}_i(\boldsymbol{\alpha})]' \Sigma_i^{-1} [\mathbf{y}_i - \mathbf{f}_i(\boldsymbol{\alpha})], \quad (2.3.20)$$

en consecuencia el estimador de $\boldsymbol{\alpha}$ se obtiene optimizando la función objetivo

$$\arg \min_{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} \sum_i^n \|\mathbf{L}' [\mathbf{y}_i - \mathbf{f}_i(\boldsymbol{\alpha})]\|^2.$$

Finalmente, no es factible encontrar la solución directa de la ecuación anteriormente

presentada dada la no linealidad de f a lo cual se debe incorporar la improbabilidad de conocer a Σ . Por ello la estimación se realiza implementando algoritmos en etapas de forma iterativa hasta la convergencia (ej.: Two-step, LB algorithm). De forma generalizada, estos algoritmos realizan:

- Primer paso: obtener el estimador FGNLS de α ($\hat{\alpha}_{FGNLS}$) mediante la función objetivo que se obtiene de maximizar la función de verosimilitud planteada en (2.3.20), de lo cual resulta el algoritmo de estimación

$$\hat{\alpha}_{FGNLS}^{(w+1)} = \hat{\alpha}_{FGNLS}^{(w)} + \left(\hat{\mathbf{F}}^{(w)'} \Sigma^{-1} \hat{\mathbf{F}}^{(w)} \right)^{-1} \hat{\mathbf{F}}^{(w)'} \Sigma^{-1} [\mathbf{y} - \mathbf{f} \hat{\alpha}_{FGNLS}^{(w)}]$$

- Segundo Paso: estimar Σ^{-1} y actualizar la estimación en el primer paso. La estimación de Σ^{-1} se realiza maximizando la verosimilitud del vector de residuales, \mathbf{r} , (Pourahmadi 1999, Seber y Wild 2003).

$$-2L(\hat{\alpha}, \psi, \sigma_u^2; \mathbf{r}) = (n-1) \log \sigma_u^2 + \frac{1}{\sigma_u^2} \sum_i^n [\mathbf{r}_i - \mathbf{Z}_i \psi]' [\mathbf{r}_i - \mathbf{Z}_i \psi]$$

dónde \mathbf{Z} denota las matrices de incidencia o de covariables definidas por los procesos antes descriptos. De lo cual resulta

$$\hat{\psi}(\hat{\alpha}) = \sum_i^n \left(\mathbf{Z}_i' \mathbf{Z}_i \right)^{-1} \sum_i^n \mathbf{Z}_i' \mathbf{r}_i \quad (2.3.21)$$

En tanto la varianza del proceso estocástico u se escribe como (2.3.22).

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{\sum_i \left\| \hat{\mathbf{L}}' [\mathbf{y}_i - \mathbf{f}_i(\hat{\alpha})] \right\|^2}{n-p} \quad (2.3.22)$$

2.3.3. Modelos no lineales mixtos (MNLM)

Considerando que existe variabilidad entre individuos o grupos, el modelo (2.3.1) se puede escribir en término de sus vectores particionados especificados anteriormente, en los que $i = 1, 2, \dots, n$ y las observaciones dentro de individuo corresponden a $j=1, 2, \dots, m_i$.

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}_i) + \mathbf{e}_i. \quad (2.3.23)$$

El vector de coeficientes, $\boldsymbol{\theta}_i$, adopta valores específicos en cada árbol tal que

$$\boldsymbol{\theta}_i = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{B}_i\mathbf{a}_i \quad \text{con} \quad \mathbf{a}_i \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Lambda}_i),$$

con $\boldsymbol{\alpha}$ como el vector de p parámetros de la población y \mathbf{a}_i el vector de q efectos aleatorios asociado al i -ésimo árbol con matriz de varianza-covarianza $\boldsymbol{\Lambda}_i$. Mientras que \mathbf{A} y \mathbf{B}_i denotan a las matrices de diseño de efectos fijos y aleatorios, respectivamente. Se plantean los siguientes supuestos distribucionales sobre las variables aleatorias:

$$\mathbf{y} | \mathbf{a} \sim \mathcal{N}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\Sigma})$$

$$\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}), \quad \boldsymbol{\Sigma} > 0 \Rightarrow \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{L}'\mathbf{L} \quad \therefore \quad \boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \mathbf{L}^{-1}(\mathbf{L}')^{-1};$$

$$\mathbf{a} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Lambda}), \quad \boldsymbol{\Lambda} > 0 \Rightarrow \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Delta}'\boldsymbol{\Delta} \quad \therefore \quad \boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \boldsymbol{\Delta}^{-1}(\boldsymbol{\Delta}')^{-1}$$

Los parámetros del modelo se estiman maximizando el logaritmo de la función de verosimilitud (ℓ) de la densidad marginal de \mathbf{y} . Para escribir ℓ se utiliza la transformación basada en los supuestos realizados sobre la matriz de varianza-covarianza de los errores, tal que los términos del modelo (2.3.23) se rescriben de acuerdo a:

$$\mathbf{y}_i^* = (\mathbf{L}')^{-1}\mathbf{y}_i,$$

$$\mathbf{f}_i^*(\boldsymbol{\theta}_i) = (\mathbf{L}')^{-1}\mathbf{f}_i(\boldsymbol{\theta}_i),$$

$$\mathbf{e}_i^* = (\mathbf{L}')^{-1}\mathbf{e}_i, \text{ talque } \mathbf{e}_i^* \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I}_i),$$

La densidad marginal de las observaciones, en la que se concentra la estimación por verosimilitud (Lindstrom y Bates 1990; Pinheiro y Bates 2000; Demidenko 2013), se enuncia en función de los vectores ponderados y de la descomposición triangular expresada anteriormente, en consecuencia:

$$\begin{aligned} \ell(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\Lambda}, \sigma^2, \mathbf{L} | \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^M \log p(\mathbf{y}_i^* | \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\Lambda}, \sigma^2, \boldsymbol{\Psi}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \log |\mathbf{L}_i| \\ &= -\frac{1}{2} \left[M \log |\boldsymbol{\Lambda}| + \sum_{i=1}^M (N_i + p) \log(\sigma^2) + \sum_{i=1}^M \log \int_{R^q} e^{\{-K\}} \partial \mathbf{a}_i + \sum_{i=1}^M \log |\mathbf{L}_i| \right] \quad (2.3.24) \\ \text{con } K &= \frac{\|\mathbf{y}_i^* - \mathbf{f}_i^*(\boldsymbol{\theta}_i)\|^2 + \|\boldsymbol{\Lambda}_i \mathbf{a}_i\|^2}{\sigma^2} \end{aligned}$$

Diferentes desarrollos se han formulado a fin de aproximar la verosimilitud ℓ que se denota en (2.3.24). En el presente se enuncia la propuesta desarrollada por Lindstrom y Bates (1990). Estos autores generan una aproximación mediante un algoritmo que alterna entre

mínimos cuadrados no lineales penalizados (PNLS) y un modelo de efectos mixtos lineales (MLE). De acuerdo a Pinheiro y Bates (1995, 2000) esta aproximación es eficiente computacionalmente y equivalente en precisión a las aproximaciones de Laplace y a la de Cuadratura Gausiana (AGA). Demidenko (2013) demuestra que el algoritmo de estimación de Lindstrom y Bates (LB) es equivalente al estimador “Two-Stage” y puede considerarse como una versión mejorada de este último, y demuestra que LB es equivalente a la aproximación de Laplace.

Como se observa, la función de verosimilitud expresada en (2.3.24) contiene una integral impropia que tiene solución únicamente cuando $f(\cdot)$ es lineal (por ello solo se puede aproximar). Con la misma definimos la función objetivo que corresponde a encontrar el argumento que minimiza la función definida en kernel (K, ver en (2.3.24)), mediante la solución de la misma se obtienen los estimadores de α y los predictores de a_i . Para obtener la solución PNLS se redefine la función objetivo mediante los factores reagrupados considerando el vector de observaciones expandido, tal que

$$\tilde{\mathbf{y}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_i^* \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \tilde{\mathbf{f}}_i(\mathbf{a}_i) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i^*(\alpha) \\ (\Delta')^{-1} \mathbf{a}_i \end{bmatrix} \quad \therefore \arg \min_{\alpha, a} \rightarrow \sum_{i=1}^n \left\| \tilde{\mathbf{y}}_i - \tilde{\mathbf{f}}_i(\mathbf{a}_i) \right\|^2$$

En consecuencia, para encontrar la solución de mínimos cuadrados no lineales condicionales en Δ (de allí el nombre de esta etapa del algoritmo) se definen las siguientes matrices de derivadas parciales necesarias para la optimización de Gauss-Newton (el supra-índice indica el orden de la iteración)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}_i^{(w)} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}_i^*(\alpha)}{\partial \alpha'} \right|_{\hat{\alpha}^{(w)}, \hat{\mathbf{a}}^{(w)}} \Rightarrow \tilde{\mathbf{X}}_i^{(w)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_i^{(w)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \hat{\mathbf{Z}}_i^{(w)} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}_i^*(\alpha)}{\partial \mathbf{a}_i'} \right|_{\hat{\alpha}^{(w)}, \hat{\mathbf{a}}^{(w)}} \Rightarrow \tilde{\mathbf{Z}}_i^{(w)} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Z}}_i^{(w)} \\ (\Delta')^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

Por tanto en la w -ésima iteración la función objetivo consiste en:

$$\arg \min_{\alpha, \mathbf{a}_i} \sum_{i=1}^n \left\| \tilde{\mathbf{y}}_i - \tilde{\mathbf{f}}_i(\alpha) + \tilde{\mathbf{X}}_i^{(w)}(\alpha - \hat{\alpha}) + \tilde{\mathbf{Z}}_i^{(w)}(\mathbf{a}_i - \hat{\mathbf{a}}_i) \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \left\| \tilde{\mathbf{w}}_i^{(w)} - \tilde{\mathbf{X}}_i^{(w)}(\hat{\alpha}) - \tilde{\mathbf{Z}}_i^{(w)}(\hat{\mathbf{a}}_i) \right\|^2 \quad (2.3.26)$$

mediante la cual se encuentran los estimadores que son solución de PNLS. La segunda fase del algoritmo consiste en actualizar (para posteriormente reutilizarla en PNLS) $\mathbf{V}(\Delta, \mathbf{L})$ mediante la verosimilitud residual de $\widetilde{\mathbf{w}}_i$, esta estimación es equivalente a la de un modelo lineal mixto dado que

$$\ell(\hat{\alpha}, \sigma^2, \Delta | \mathbf{w}) = -\frac{m}{2} \log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left\{ \log |\mathbf{V}_i| + \sigma^{-2} [\hat{\mathbf{w}}_i^{(w)} - \hat{\mathbf{X}}_i^{(w)} \alpha]' \mathbf{V}_i^{-1} [\hat{\mathbf{w}}_i^{(w)} - \hat{\mathbf{X}}_i^{(w)} \alpha] \right\} \quad (2.3.27)$$

dónde $\mathbf{V}_i = \widetilde{\Sigma}_i^{(w)} + \widetilde{\mathbf{Z}}_i'^{(w)} \widetilde{\Lambda}_i^{(w)} \widetilde{\mathbf{Z}}_i^{(w)}$.

2.4. Estimación de funciones de ahusamiento

Tanto el modelo de Kozak (1988, 2004) como el de Bi (Bi y Long 2000, Bi 2001) se ajustan mediante una aproximación lineal a diámetros a diferentes alturas medidos sobre el mismo árbol y los parámetros se estiman mediante regresión de mínimos cuadrados. Ambos autores mencionan que los datos presentan autocorrelaciones positivas y heterocedasticidad pero que ello no afectaría significativamente la precisión de las predicciones de mínimos cuadrados (Kozak 1997), consideración mediante la cual justifican el hecho de no modelar este efecto.

La estructura de autocorrelación se puede modelar, explícita o implícitamente, mediante el ajuste de modelos de efectos mixtos (Gregoire y Schabenberger, 1996). Para modelar de forma explícita la autocorrelación se emplean diferentes modelos paramétricos de la matriz de varianzas-covarianzas que resultan de especificar los coeficientes del modelo (2.3.9). Nuñez-Anton y Zimmerman (2001) explicitaron que la utilización del tipo de modelo depende de la estacionalidad de la varianza, la regularidad del espaciamiento entre observaciones, la rectangularidad del diseño de medición y del grado de desbalance de las observaciones.

Tasissa y Burkart (1997) expresan que si no se considera la autocorrelación entre observaciones las variables que no son significativas pueden tomarse como significativas y viceversa. De acuerdo a ello, ajustaron la función de exponente variable de Muharwire (1993) y modelaron la autocorrelación con el modelo autorregresivo de primer orden a fin de evaluar diferencias entre tratamientos silviculturales. Garber y Maguirre (2003) señalan que si no se modela la autocorrelación se afecta la prueba de significancia de las covariables dado que la variancia de los parámetros estimados se encuentra subestimada. Estos autores demostraron

que al contemplar la correlación en el modelo de Kozak (1988) se producen cambios en la estimación de los parámetros y en las pruebas estadísticas. A su vez, determinaron que la introducción de efectos aleatorios no fue suficiente para reducir la autocorrelación, para lo cual precisaron incorporar al modelo un proceso autorregresivo continuo de primer orden (CAR1).

Álvarez-González *et al.* (2004) determinaron que, independientemente de la estructura de los datos, la modelización de la estructura del error mejora la precisión del modelo de ahusamiento. Estos autores señalaron que para el caso de varianzas estacionarias en el perfil del fuste con datos rectangulares y equiespaciados, el modelo autorregresivo parece ser adecuado. A su vez, Nuñez-Anton y Zimmerman (2001) especificaron que los modelos ante-dependientes muestran potencialidad cuando existe algún problema de balance, rectangularidad de datos u homogeneidad de las varianzas.

García (2015) propone realizar el ajuste de su modelo mediante regresión no lineal de mínimos cuadrados. A su vez, enunció que el uso de secciones transversales, en remplazo de diámetros, disminuye la heterocedasticidad de los errores acumulados y señala que la proporción de pares autocorrelacionados no justificaría considerar estructuras complejas del error. Lo expresado por este autor no se condice con lo expuesto en el caso de estudios con datos longitudinales, para los cuales se expresa la conveniencia de modelar la estructura del error para mejorar la precisión del modelo. La visión de dicho autor, hasta cierto punto contrapuesto con la de otros (Gregoire y Schabenberger 1996; Tasissa y Burkhart 1997; Nuñez-Anton y Zimmerman 2001), plantea el interrogante acerca del impacto de modelar la autocorrelación explícitamente, cuando se ajustan modelos no lineales, en la distribución de las estimaciones.

Capítulo Tres. *Materiales y Métodos*

Capítulo Tres

3. Materiales y Métodos

A continuación, se detallan los materiales y métodos con los cuales se resuelven los objetivos planteados en la introducción. Puntualmente se describe el enfoque metodológico adoptado para determinar el impacto de estructuras de correlación en el ajuste y estimación de funciones de ahusamiento dinámico. Es factible discriminar dos complementos: el primero consta de la modelización del crecimiento en el que se utiliza información empírica generada en unidades de observación; en consecuencia, se describen los datos empleados, la metodología de edición de los mismos, el enfoque y las funciones planteadas en la formulación del modelo de crecimiento, además de la estrategia empleada de ajuste y selección de modelos. El segundo corresponde a la aplicación del modelo de crecimiento para simular datos de ahusamiento individual e inducir distintos escenarios de procesos de autocorrelación en la estructura de los mismos. Se detallan las variantes empleadas del modelo de ahusamiento dinámico y la estrategia con la que se determinó el impacto de las estructuras de autocorrelación en la estimación.

3.1. Datos de crecimiento

Se emplearon los datos de inventario, Dn y Ht , y cubicación, diámetro en altura, provistos por el sistema de inventario de parcelas de medición permanentes (PMP), de plantaciones de *Eucalyptus grandis*, del equipo de silvicultura de la EEA INTA Bella Vista, provincia de Corrientes (República Argentina). Los diámetros se midieron con cinta diamétrica con un error de 0,1 cm, en tanto que la medición de la Ht se realizó con hipsómetro láser de precisión de 0,1 m. El rango de edad de las mediciones es de 1 a 15 años, las parcelas o individuos no cuentan con las mismas cantidades de mediciones ni en las mismas edades.

Se acotó al conjunto de datos de acuerdo a criterios elementales, para lo cual se determinó la trazabilidad de los mismos, se evaluó la distribución por edades explorando datos atípicos, se analizaron los incrementos y se requirieron las frecuencias para determinar la cantidad de mediciones por individuos. La edición de los datos en conjunto con la exploración de las relaciones entre variables permitió establecer el enfoque y la formulación adecuada del modelo de crecimiento, además de las relaciones funcionales a ajustar. En

consecuencia, con los datos de inventario de PMP se consolidó un conjunto con 393 árboles medidos en 28 parcelas. La ubicación de las parcelas se presenta en la Figura 2, donde se puede observar que las PMP empleadas se concentran en el centro sudoeste de las planicies y lomadas arenosas de Corrientes (Argentina). El sitio se caracteriza por estar formado por suelos jóvenes, Entisoles en la clasificación *Soil Taxonomy*, de poco desarrollo y baja fertilidad (Escobar *et al.* 1996). La vegetación natural predominante corresponde al Parque y la Pradera (Capurro *et al.* 1985) modificada antrópicamente por producción ganadera y plantaciones forestales (*Eucalyptus* sp. y *Pinus* sp.). La cartografía de base presentada en la Figura 2, Esri-National Geographic, denota en verde oliva fuerte a la mencionada formación y permite observar la fuerte influencia hídrica en su génesis.

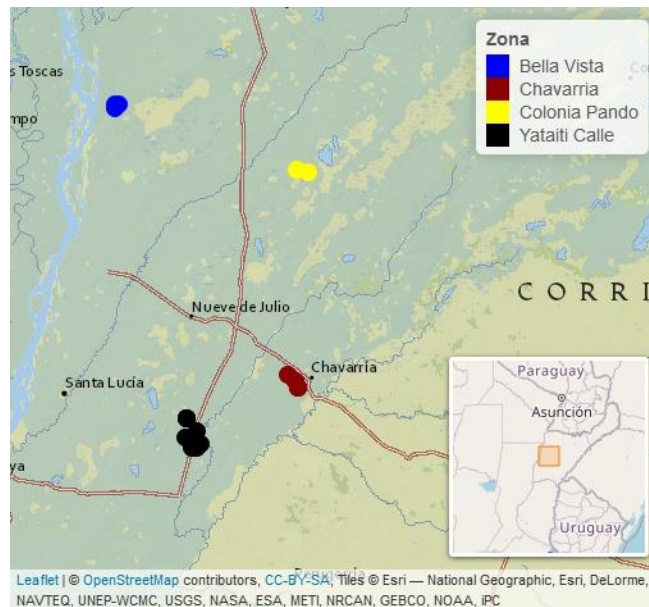


Figura 2. Ubicación de PMP de *Eucalyptus grandis* del sistema de inventario forestal empleadas en la formulación del MCF, discriminadas por localidad de cercanía.

En estas PMP el espacio de crecimiento individual fue estable, sin raleo ni mortalidad, y correspondió a $18 \text{ m}^2 (\pm 3 \text{ m}^2)$, que en densidades corresponde a un intervalo de 556 a 667 árboles en la hectárea. En la Tabla 1 se presentan los promedios y desvíos estándares de las variables de interés discriminando por grupos de edad con rango de tres años. Se observa que la cantidad de árboles y de parcelas varía entre grupos de edad ya que no todos los árboles fueron medidos a todas las edades.

Tabla 1. Estadísticos descriptivos para Dn (cm) y Ht (m) asociados al número de observaciones por grupo de edad (GE en años) de los datos de PMP de *Eucalyptus grandis* cultivado en suelos arenosos de Corrientes (Argentina)

GE	\overline{Dn} (cm)	\overline{HT} (m)	N° de árboles	N° de parcelas
(0 - 3]	7,98 ($\pm 2,89$)	7,94 ($\pm 2,52$)	257	22
(3 - 6]	16,54 ($\pm 3,93$)	17,10 ($\pm 2,88$)	298	21
(6 - 9]	21,84 ($\pm 4,67$)	23,61 ($\pm 3,44$)	298	21
(9 - 12]	23,19 ($\pm 5,47$)	26,78 ($\pm 3,51$)	219	13
(12 - 15]	30,49 ($\pm 5,61$)	32,10 ($\pm 4,08$)	56	3

Los valores entre paréntesis corresponden a los desvíos estándares observados en la muestra.

En la Figura 3 se muestran los 284 perfiles empleados para estimar los parámetros del modelo de ahusamiento. Estos perfiles se construyeron mediante las cubicaciones, mediciones en la base, a 1,3 m y, luego, cada 2 m, efectuadas en individuos muestreados en los mismos sitios en los que se emplazaron las PMP y cuyas edades van de los 9 a los 15 años (se excluyeron las cubicaciones realizadas a edades superiores a 15 años; 52 perfiles).

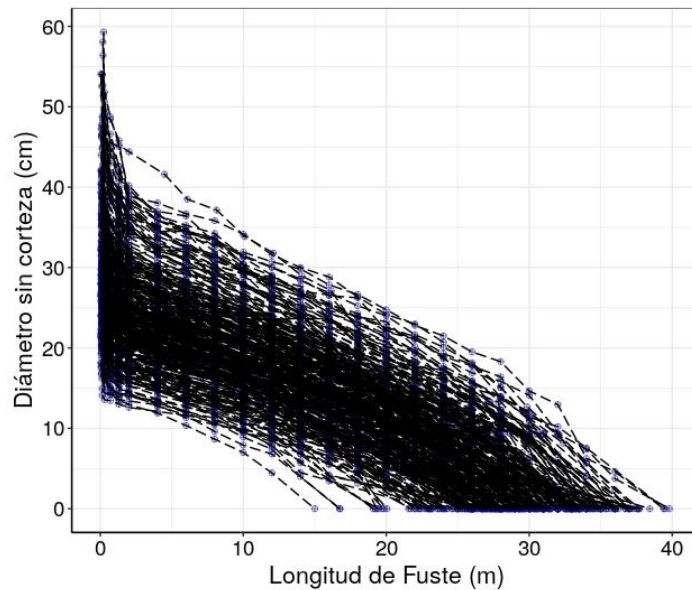


Figura 3. Perfiles individuales observados del diámetro de *Eucalyptus grandis* cultivado en Corrientes (Argentina).

3.2. Formulación y estimación del modelo de crecimiento

Mediante la formulación se especificaron las relaciones funcionales a estimar que conforman al MCF de árbol individual. La formulación de dicho modelo se realizó con el objetivo de obtener un generador de datos de ahusamiento individual con estructuras de

autocorrelación específicamente conocidas. En consecuencia, la formulación se acotó a obtener un modelo general, lo que significa que no interesa mensurar o determinar el impacto de esquemas de manejos silviculturales específicos que se acostumbran a aplicar para obtener un determinado producto o resolver problemas puntuales. No obstante, dado su carácter general, es factible que el mismo pueda ser empleado en posteriores estudios para evaluar efectos o factores que inicialmente no se estiman o mensuran.

Los supuestos con los que se planteó y que soportan la formulación corresponden a:

- Estabilidad: expresa que la masa forestal no sufre cambios significativos a causa de disturbios, tasas de mortalidad significativas o esquemas silvícolas con raleos intensos u otros, que determinen cambios significativos en las dinámicas de competencia entre individuos.
- Los procesos de masa (rodal) se pueden desagregar a nivel individual y, en sentido contrario, de su integración resultan los procesos de masa. Esto básicamente implica que es factible modelar la variabilidad a nivel de individuo.
- La variabilidad espacial no presenta patrones distinguibles que determinen la necesidad de modelar variables que funcionen como coordenadas eco-fisiológicas (Pretzsch 2009) tales como clases de sitio.

De acuerdo a estos supuestos se formuló un MCF de árbol individual estático para plantaciones de *Eucalyptus grandis* en la región de lomadas arenosas de Corrientes. En dicha formulación se adapta el enfoque de espacios de estados de crecimiento descrito por García (1994) y presentado en el apartado 2.1.3. El vector de estado se compuso por las principales variables biométricas, Dn y Ht , en tanto que la función de salida corresponde a un modelo de ahusamiento estático. Este modelo se presenta formalmente en (3.2.1). El soporte brindado por los supuestos planteados permite no complejizar el sistema con funciones de mortalidad ni de reclutamiento, dado que se trata de sistemas forestales implantados, regulares y coetáneos. A su vez, el sistema se planteó mediante las funciones de transición globales de cada variable, lo cual permitió que la determinación de estados sea directa y la estimación resultara más sencilla.

$$s_i = \begin{cases} \mathbf{x}_{i(t)} = \begin{bmatrix} Dn_{i(t)} \\ Ht_{i(t)} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} F_1(t, \boldsymbol{\theta}_i^D) \\ F_2(Dn_{i(t)}, \boldsymbol{\theta}_i^H) \end{bmatrix} \\ d_{h(i)} = g(\tilde{\mathbf{x}}_{i(t)}, h, \boldsymbol{\theta}_i^d) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Cada término de (3.2.1) se detalla en los apartados siguientes: s_i es el sistema de ecuaciones y relaciones que define el modelo de crecimiento del i -ésimo individuo; $\mathbf{x}_{i(t)}$ el vector de estado se conforma por el Dn y la Ht del árbol i a la edad t ; $F_1()$ y $F_2()$ corresponden a las funciones globales de transición que modelan y predicen el Dn y la Ht respectivamente; $Dn_{i(t)}$ enuncia la predicción del $Dn_{i(t)}$; $\boldsymbol{\theta}_i^D$, $\boldsymbol{\theta}_i^H$ y $\boldsymbol{\theta}_i^d$ denotan a los vectores de coeficientes específicos de la función de transición del Dn , de la Ht y de la función de salida respectivamente; con $g()$ se denota la función de salida que predice a $d_{h(i)}$, que es el diámetro interno en la longitud del fuste h para el árbol i . La mencionada función de salida emplea el vector de coeficientes aleatorios $(\boldsymbol{\theta}_i^d)$ junto a la covariable h , longitud de fuste, y al vector de estado predicho $\tilde{\mathbf{x}}_{i(t)}$.

3.2.1. Vector de estado

Como se enunció previamente, el vector de estado se compuso de las funciones de transición global que modelan el Dn y la Ht . Las expresiones de las mismas se detallan en los siguientes apartados.

A. Curva de rendimiento (transición) del Dn

La función empleada para modelar el rendimiento del diámetro corresponde al derivado por Marske (1967) para describir la demanda bioquímica de oxígeno. El mismo se conoce como BOD por las siglas en inglés del proceso para el cual se derivó (biochemical oxygen demand), se encuentra ampliamente documentado en la bibliografía (Bates y Watts 1988; Pinheiro y Bates 2000; Robinson y Hamann 2010) y expresa

$$Dn_{i(t)} = \theta_{1i} \left\{ 1 - \exp \left[-t \exp(\theta_{2i}) \right] \right\} + e_{i(t)}, \quad (3.2.2)$$

donde $Dn_{i(t)}$ corresponde al diámetro normal medido en el i -ésimo árbol, el subíndice

indexado (t) denota la edad en años en la que se midió, el subíndice i corresponde al número de árbol y asume valores enteros 1, 2, ..., n ; en tanto θ_{1i} y θ_{2i} denotan los coeficientes individuales a estimar (desconocidos) y $e_{i(t)}$ al error correspondiente a la observación i -ésima en la t -ésima edad.

Este modelo se seleccionó para su ajuste debido a su parsimonia: de los dos coeficientes que presenta solo uno no es lineal (θ_{2i}), y a que es biológicamente interpretable, θ_1 corresponde a la asíntota de crecimiento (máximo biológico) y θ_2 se denomina parámetro de escala (proporcional al logaritmo de tasa de crecimiento). Para el mismo se ajustaron las variantes en las que solamente uno de los coeficientes era de naturaleza aleatoria, asociada al i -ésimo árbol, o bien se cumplía que las matrices de diseño, del modelo lineal subyacente que determina la distribución de los coeficientes, eran identidades de orden 2: $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{I}_2$, (ver sección 2.3.3).

B. Función hipsométrica

La altura se ajustó como una relación funcional con el Dn predicho. Las funciones de este tipo se denominan en el acervo forestal como funciones hipsométricas. Las formas funcionales que se emplearon corresponden a:

$$\begin{aligned}
 Ht_{i(t)} &\approx 10^{\left(\theta_{3i} + \theta_{4i} Dn_{i(t)}^{-1}\right)} && \text{Prodan et al. (1997)} \\
 Ht_{i(t)} &\approx 1,3 + \theta_{3i} Dn_{i(t)}^{\theta_{4i}} && \text{Schreuder et al. (1979)} \\
 Ht_{i(t)} &\approx 1,3 + \exp\left(\theta_{3i} + \frac{\theta_{4i}}{1 + Dn_{i(t)}}\right) && \text{Wykoff et al. (1982)} \\
 Ht_{i(t)} &\approx 1,3 + 10^{\left(\theta_{3i} Dn_{i(t)}^{\theta_{4i}}\right)} && \text{Larson (1986)}
 \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

dónde θ_{3i} y θ_{4i} denotan los coeficientes en cada modelo, en tanto $Dn_{i(t)}$ corresponde al diámetro predicho por la curva de rendimiento ajustada mediante el modelo BOD, mientras que la variable respuesta $Ht_{i(t)}$ enuncia la i -ésima altura total indexada a la t -ésima edad.

3.2.2. Función de salida

La función de salida empleada corresponde a la expresión matemática que modela el cambio o ahusamiento del diámetro a lo largo del fuste cuyas covariables corresponden al vector de estado y la longitud de fuste, h . Los modelos ajustados corresponden a las expresiones estáticas presentadas previamente en el apartado 2.2, específicamente las funciones desarrolladas por Kozak (1988, 2004), presentadas en las ecuaciones (2.2.12) y (2.2.15), y el modelo trigonométrico de Bi (2000), ver apartado 2.2.1.1.b.

A fin de ser consistentes con la formulación de s (modelo de crecimiento) los coeficientes de las funciones de ahusamiento se denotaron con θ_{pi}^d , donde el supraíndice d indica la pertenencia de los coeficientes a la función de salida, p el orden del coeficiente ($p = 1, 2, \dots$) e i el índice correspondiente al árbol. La expresión (3.2.4) permite aclarar este enunciado, en dicha ecuación se presenta el exponente de la función de Kozak (2004) en el cual el último término se modificó sutilmente a fin de lograr la convergencia en la estimación, cada término se especificó previamente.

$$k_i = \theta_{4i}^d \left(\frac{h}{Ht_{i(t)}} \right)^4 + \theta_{5i}^d e^{-\left(\frac{Dn_{i(t)}}{Ht_{i(t)}} \right)} + \theta_{6i}^d \left[\frac{1 - \left(\frac{h}{Ht_{i(t)}} \right)^{1/3}}{1 - pc^{1/3}} \right]^{0,1} + \frac{\theta_{7i}^d}{Dn_{i(t)}} + \theta_{8i}^d Ht_{i(t)} \left[1 - \left(\frac{h}{Ht_{i(t)}} \right)^{1/3} \right] + \theta_{9i}^d \left[\frac{1 - (h)^{1/3}}{1 - pc^{1/3}} \right] \quad (3.2.4)$$

3.2.3. Estimación del MCF estático de árbol individual

De acuerdo a lo desarrollado previamente, el modelo de crecimiento plantea un vector de estado definido por funciones de transición global para el Dn y la Ht , en tanto que la función de salida corresponde a un modelo de ahusamiento del diámetro (d). El carácter de individual del modelo se obtuvo al considerar para cada función que el vector de coeficientes es aleatorio, $\theta^x = \mathbf{A}\alpha + \mathbf{B}\mathbf{a}_i$ para las funciones que modelan el vector de estado y $\theta^d = \mathbf{A}\beta + \mathbf{B}\mathbf{b}_i$ para la función de salida.

En la siguiente expresión se denotan las distribuciones que se asumen para cada vector de coeficientes. En (3.2.5) los supraíndices denotan a qué componente del modelo pertenece cada uno. En consecuencia, para distinguir los subvectores de coeficientes y parámetros de

la distribución propia de los submodelos del Dn , Ht y del ahusamiento del diámetro se emplea D , H y d , respectivamente.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}^D \\ \boldsymbol{\theta}^H \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left[\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}^D \\ \boldsymbol{\alpha}^H \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Lambda}^D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Lambda}^H \end{pmatrix} \right] \wedge \boldsymbol{\theta}^d \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{\Lambda}^d) \quad (3.2.5)$$

A fin de modelar la variabilidad entre individuos, para cada componente de s se contemplaron diferentes estructuras de la matriz de covarianzas de la distribución del vector de coeficientes, $\boldsymbol{\Lambda}$. Estas estructuras se generaron a partir de diferentes especificaciones de la matriz \mathbf{B} (apartado 2.3.3) y de determinar si la covarianza entre coeficientes es cero o no, ejemplo: $\text{cov}(\theta_{1i}, \theta_{2i}) \neq 0$. En el ajuste, tanto de las funciones que definen el vector de estado como de la función de salida, se utilizaron diferentes estructuras de varianzas-covarianzas para modelar la falta de independencia de las observaciones (dentro de individuo) y la heterocedasticidad de la varianza residual. Las estructuras de correlación ajustadas (no en todas las funciones) fueron: desestructurado (generalizado), autorregresivo de primer orden (AR(1)) y de media móvil de primer orden (MA(1)); estas estructuras se describen en el apartado 2.3.2. Finalmente, en los modelos con heterocedasticidad residual, la varianza se ajustó como una función potencial de la edad (t) de acuerdo a la expresión $\text{var}(e_{it}) = \sigma_e^2 |t|^\gamma$.

La estimación se realizó mediante el algoritmo de Lindstrom y Bates (Lindstrom y Bates 1988; Pinheiro y Bates 1995, 2000; Seber y Wild 2003) que maximiza la verosimilitud en dos etapas, la primera corresponde a la estimación mediante mínimos cuadrados penalizados asumiendo conocida $\boldsymbol{\Lambda}$ y una posterior actualización mediante la linealización de los efectos aleatorios. La base teórica y las expresiones matemáticas de la verosimilitud conjunta a maximizar se presentan en el apartado 2.3.3. La selección de modelos se realizó mediante los criterios de verosimilitud de Akaike y Bayesiano, AIC y BIC, y al grado de ajuste medido como el cuadrado de la correlación entre predichos y observados, denotado con C .

$$\begin{aligned} AIC &= 2p - 2\ell \\ BIC &= -2\ell + p \ln(n.m) \\ C &= \text{cor}^2(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

3.3. Simulación

La simulación se planteó y generó en función de la definición dada por Shannon (1975) que establece que la misma es el proceso mediante el cual se diseña un modelo de un sistema real y se llevan a cabo experiencias, cuya finalidad es evaluar estrategias o mecanismos novedosos que modifican el funcionamiento de dicho sistema. La simulación se planteó de acuerdo con el esquema presentado en Figura 4.

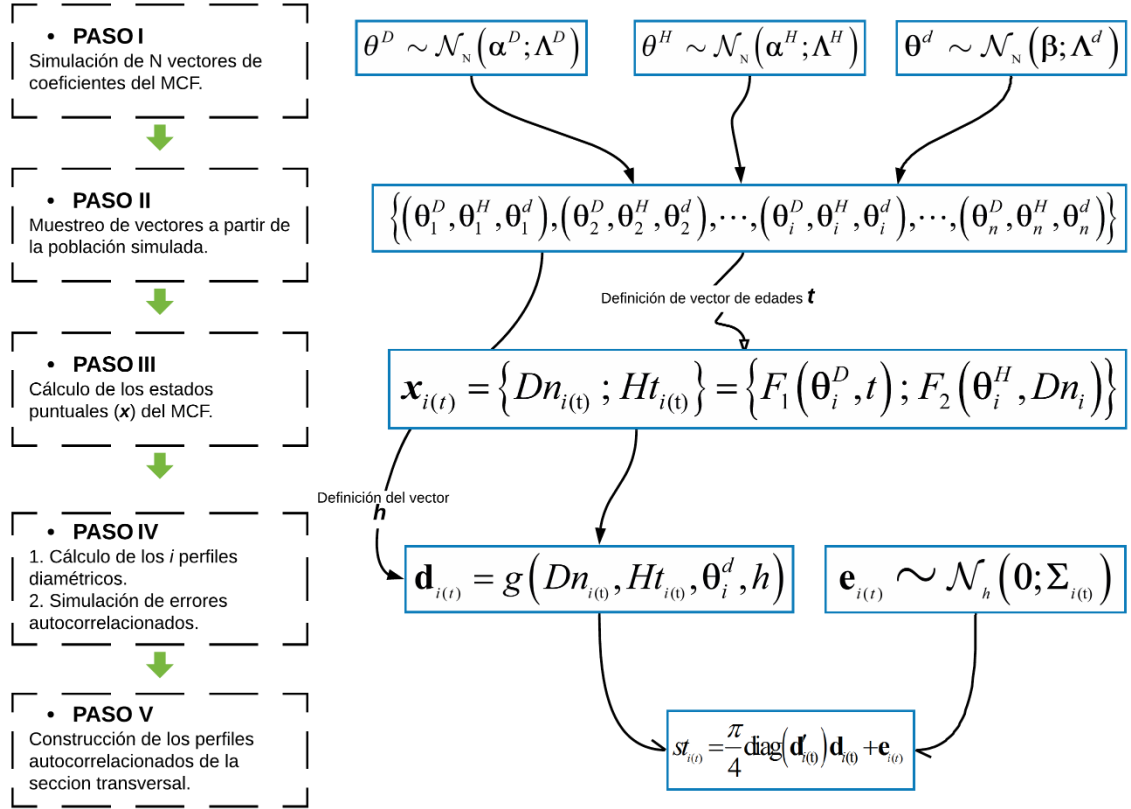


Figura 4. Esquema de la simulación del crecimiento individual y de perfiles dinámicos de la sección transversal con procesos de dependencia del error (\mathbf{e}) en *Eucalyptus grandis*. θ corresponde al vector de coeficientes aleatorios de distribución normal con vector de media α y matriz de variancia Λ , los supraíndices D , H y d identifican los componentes de Dn , Ht y diámetro en el fuste, \mathbf{x} el vector de estados de funciones de transición globales del Dn , F_1 , y la Ht , F_2 , $g()$ la función de ahusamiento diamétrico, Σ la matriz de covariancias de \mathbf{e} y \mathbf{st}_{it} el vector de ahusamiento de la sección transversal en el i -ésimo individuo a la edad t .

La implementación de la simulación esquematizada en la Figura 4 se realizó en el software R (Core Team, 2019). La obtención de los vectores a partir de distribuciones normales multivariadas se realizó mediante la función *mvtnorm* del paquete MASS (Ripley *et al.* 2019) que implementa el algoritmo descrito por Ripley (1987). El mismo se formula

mediante la descomposición de Cholesky, tal que a un vector aleatorio (\mathbf{a}), con distribución multivariada normal con vector de medias ($\boldsymbol{\alpha}$) y matriz de covarianza ($\boldsymbol{\Lambda}$) conocida y positiva definida, se puede escribir cómo $\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{L}\mathbf{z}$; donde \mathbf{z} denota al vector multivariado con distribución normal estándar y \mathbf{L} a la matriz de factorización de Cholesky de $\boldsymbol{\Lambda}$. Dicha expresión establece un conjunto de ecuaciones recursivas cuya cantidad se determina por el orden de la simulación. Estas ecuaciones son funciones de los términos de la descomposición de Cholesky y del valor de \mathbf{z} . El método por el cual se obtienen los valores de \mathbf{z} corresponden al de la función de densidad inversa que para una normal estándar es la de una uniforme (Ripley 1987).

Como se enunció previamente, en el esquema gráfico de la Figura 4 se denota el proceso de simulación del modelo; puntualmente, se individualizan los vectores aleatorios y la dependencia entre ellos. Específicamente, el Paso I en la Figura 4 denota la simulación de los vectores de coeficientes del MCF ($\boldsymbol{\theta}' = (\boldsymbol{\theta}^H, \boldsymbol{\theta}^D, \boldsymbol{\theta}^d)$), mediante el algoritmo de Ripley, en la que se utilizaron las distribuciones multivariadas especificadas en (3.2.5), cuyos parámetros se estimaron mediante máxima verosimilitud (aproximación LB) y no se contempló el proceso de incertidumbre de la estimación; esto último implica que se suponen verdaderos los valores estimados a fin de simplificar el proceso. Dicho proceso generó N vectores $\boldsymbol{\theta}$ que aseguraron que la diferencia, entre el valor teórico y el obtenido mediante simulación de los parámetros de la distribución conjunta, sea menor a 10^{-5} .

En el segundo nivel del flujo, Paso II en Figura 4, se presenta la obtención de muestras de tamaño n desde la población de coeficientes simulada de orden N . El tamaño n se determinó en función del error de muestreo simple de una normal. Una vez obtenida la muestra se calcularon los estados \mathbf{x}_i , Paso III en Figura 4, para las edades especificadas en \mathbf{t} , y que corresponden a 6, 9 y 12 años. Posteriormente, en \mathbf{h} se fijaron los vectores que determinan las longitudes parciales de fuste a las que se calculan los diámetros $d_{i(h)}$. Para ello, los vectores de longitudes parciales se establecieron como secuencias discretas de la forma $\mathbf{h}_i = (0, 1, 2, \dots, r, \dots, Ht_i) / r \in \mathbb{N}$.

El siguiente paso, Paso IV en Figura 4, consistió en obtener los vectores individuales de diámetros en altura a la edad t , $\mathbf{d}_{i(t)}$, que resultaron de aplicar la función de ahusamiento

estática, denotada con $g(\cdot)$, que emplea las variables del vector de estado a la t -ésima edad, el vector de coeficientes $\boldsymbol{\theta}^d$ y el de longitudes parciales \mathbf{h} .

La obtención del vector de errores \mathbf{e} se enuncia en el Paso IV en Figura 4, para el mismo se especificaron diferentes estructuras de la matriz de covarianzas como resultado de considerar diferentes magnitudes de la dependencia entre sucesivas realizaciones de $st_{i(h)}$ y diferentes procesos que modelan la dependencia del error. Puntualmente se empleó dependencia baja y alta correspondiente a valores de correlaciones entre observaciones sucesivas de 0,5 y 0,85, combinando variabilidad baja y alta, 40^2 cm^4 y 80^2 cm^4 . Para simular la dependencia en el error se emplearon los procesos autorregresivos de primer (AR(1)) y de segundo orden (AR(2)).

Finalmente, mediante el Paso V en Figura 4 se especifica la generación del vector \mathbf{st}_i que contuvo los valores correspondientes a las secciones transversales, especificadas a las longitudes del fuste para el i -ésimo árbol, que se obtienen de transformar el vector \mathbf{d} y adicionar el vector de errores \mathbf{e} .

- **Proceso AR (1)**

El modelo autorregresivo de primer orden que se empleó enuncia que el error en la r -ésima posición en el fuste se escribe como:

$$e_r = \phi_1 e_{r-1} + u_r$$

La expresión anterior puede escribirse de forma tal que únicamente dependa del coeficiente autorregresivo. Ello se obtiene empleando el operador de retardo B (definido en 2.3.2) de forma que $(I - \phi B)e_r = u_r$, entonces

$$\begin{aligned} e_r &= (1 - \phi_1 B)^{-1} u_r \\ &= (1 + \phi_1 B + \phi_1^2 B^2 + \dots) u_r \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \phi_1^h u_{r-h}. \end{aligned}$$

La especificación de la función de autocorrelación en procesos autorregresivos generales cuando éste es de primer orden resulta en $\rho_r = \phi_r \rho_{r-1}$, tal que su solución corresponde a

$$\begin{aligned}\rho_r &= \phi_1^r \\ &= \rho_1^r\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

En esta última expresión es posible observar que en este proceso la autocorrelación decae exponencialmente a cero cuando ϕ_1 es positivo; éste es el caso de los cuatro escenarios que se simularon en este proceso de dependencia (dos valores de correlación combinados con dos magnitudes de variabilidad). A su vez, la función de variancia permite encontrar la expresión formal de la misma de acuerdo a:

$$\begin{aligned}\sigma_e^2 &= \frac{\sigma_u^2}{1 - \rho_1 \phi_1} \\ &= \frac{\sigma_u^2}{1 - \phi_1^2}\end{aligned}\tag{3.3.2}$$

Como se mencionó, los cuatro escenarios simulados bajo AR(1) resultaron de la combinación de $\phi_1 = 0,5$ y $\phi_1 = 0,85$ con $\sigma_e^2 = 40^2 \text{ cm}^4$ y $\sigma_e^2 = 80^2 \text{ cm}^4$.

Dado que $\mathbf{u} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_u^2 \mathbf{I})$ los valores de este vector aleatorio se generaron a partir de la función de distribución conjunta mediante el método anteriormente mencionado de la inversa de la función de probabilidad:

$$p(\mathbf{u} | \sigma_u^2) = (2\pi\sigma_u^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_u^2} \mathbf{u}'\mathbf{u}\right\}$$

En consecuencia el vector de errores autocorrelacionados corresponde a $\mathbf{e} = \mathbf{L}\mathbf{u}$, donde \mathbf{L} es la matriz triangular inferior de la descomposición de Cholesky que factoriza la matriz de varianzas de \mathbf{e} . La siguiente expresión permite comprobar lo afirmado y denotar la distribución de \mathbf{e} .

$$\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(\mathbf{E}(\mathbf{L}\mathbf{u}); \text{var}(\mathbf{L}\mathbf{u}))$$

$$\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}; \sigma_u^2 \mathbf{L}\mathbf{L}')$$

$$\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}; \sigma_u^2 \mathbf{R}) \equiv \mathcal{N}(\mathbf{0}; \mathbf{\Sigma})$$

Finalmente, la función de probabilidad conjunta del error bajo estructura AR (1) se escribe

como

$$p(\mathbf{e}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{e}' \Sigma^{-1} \mathbf{e} \right\}$$

$$p(\mathbf{e}) = (2\pi\sigma_u^2)^{-\frac{n}{2}} (1-\rho^2)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_u^2} (\mathbf{L}^{-1}\mathbf{e})' (\mathbf{L}^{-1}\mathbf{e}) \right\}$$

- **Proceso AR (2)**

Además de AR (1), y de forma equivalente, se simuló una estructura autorregresiva de orden 2, denotada por AR (2), que corresponde al proceso mediante el cual el efecto aleatorio en la posición r se puede escribir como:

$$e_r = \phi_1 e_{r-1} + \phi_2 e_{r-2} + u_r$$

Trabajando de forma adecuada con las expresiones generales de covariancia del modelo autorregresivo se obtienen las expresiones formales de autocorrelación, tal que:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}$$

en consecuencia, para $k=1$ y $k=2$ las expresiones resultan en:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 \rho_0 + \phi_2 \rho_{-1} = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2 \rho_0 = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2 \end{aligned}$$

De manera equivalente a lo descrito en AR(1), la función de probabilidad conjunta corresponde a

$$p(\mathbf{e}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sigma_e^{-2} \left(1 - \left(\frac{\phi_1}{1-\phi_2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} (\sigma_u^2)^{-\left(\frac{n-2}{2}\right)} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_u^2} (\mathbf{L}^{-1}\mathbf{e})' (\mathbf{L}^{-1}\mathbf{e}) \right\}$$

Seber y Wild (2003) enuncian que para que se cumplan las condiciones de estacionalidad es necesario que

$$\phi_1 + \phi_2 < 1, \quad \phi_2 - \phi_1 < 1, \quad \text{y} \quad |\phi_2| < 1 ;$$

en consecuencia, los cuatro procesos AR(2) se simularon con las combinaciones de las dos magnitudes de variancia especificadas en la descripción del proceso de primer orden y los coeficientes autorregresivos con los que se obtienen las dos magnitudes de dependencia evaluada fueron:

- a) $\phi_1 = 0,7$ con $\phi_2 = -0,1$ y
 b) $\phi_1 = 0,7$ con $\phi_2 = 0,2$.

En concreto, se simularon ocho escenarios, cuatro en cada proceso autorregresivo, que resultan de combinar las dos intensidades de dependencia y dos magnitudes de variabilidad. A su vez, en cada caso se trabajó con la estructura de datos completa, lo que significa que se respeta la especificación del vector de longitudes parciales $\mathbf{h}_i = (0, 1, 2, 3, \dots, r, \dots, Ht_i)$; estos escenarios se denotaron $Lc = 1$ m. Paralelamente, se eliminaron los datos de forma que la distancia entre observaciones sea de 3 m, tal que la resulta $\mathbf{h}'_i = (0, 3, 6, \dots, r, \dots, Ht_i)$; escenarios denominados con $Lc = 3$ m.

3.4. Estimación del ahusamiento dinámico

Como resultado del proceso de simulación se obtuvieron ocho escenarios, con dos estructuras de medición, en los que la variable st presenta diferentes modelos y grados de dependencia. En cada caso se estimaron los coeficientes del modelo de García (2015), puntualmente las variantes correspondientes al modelo exponencial-exponencial (MEE), que se presenta explícitamente en (3.4.1), y al exponencial-general (MEG), cuya expresión se denota formalmente en (3.4.2).

$$st(h, Ht) \propto Ht - \beta_1 \left(1 - e^{-\left(\frac{Ht-h}{\beta_1}\right)} \right) + \beta_3 (Ht-h) e^{-\frac{h}{\beta_4}} - h \quad (3.4.1)$$

$$st(h, Ht) \propto Ht - \beta_1 \left(1 - e^{-\left(\frac{Ht-h}{\beta_1}\right)} \right) + \beta_3 (Ht-h) \left(1 - \frac{\beta_5}{\beta_4} h \right)^{\frac{1}{\beta_5}} - h \quad (3.4.2)$$

Los coeficientes de las variantes enunciadas se estimaron mediante el estimador de mínimos cuadrados no lineales ($\hat{\beta}_{NLS}$), bajo el supuesto independencia y homocedasticidad de los errores, y por máxima verosimilitud ($\hat{\beta}_{FGNLS}$), incorporando la estimación de la estructura de autocorrelación en la matriz de variancia del error tal como se presentó en (2.3.20). Estos ajustes se efectuaron con el 80% de los perfiles simulados y con el 20% restante se efectuó la validación de las estimaciones en cada escenario que se simuló. En cada caso se calculó la media del error, \overline{E} , la raíz del error cuadrático medio, RMSE, y el

indicador C; el primero de ellos permite evaluar el sesgo, el segundo la variancia y el tercero la eficiencia de las estimaciones.

Finalmente, los estimadores $\hat{\beta}_{NLS}$ se compararon con los $\hat{\beta}_{FGNLS}$ empleando la distribución esperada para cada caso, lo cual permite concluir respecto al efecto de modelar los procesos de dependencia en la estimación de parámetros en funciones de ahusamiento dinámico. Seber y Wild (2003) demuestran que $\hat{\beta}_{FGNLS}$ se distribuye asintóticamente normal cuando se cumplen las condiciones de regularidad, inversibilidad del proceso de dependencia y pertenencia de β al espacio paramétrico cerrado \mathbf{B} , por lo cual se calculó la distribución esperada denotada en (3.4.4), mientras que en (3.4.3) se denota la distribución esperada del estimador $\hat{\beta}_{NLS}$.

$$\hat{\beta}_{NLS} - \beta \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}; \sigma_e^2 \mathbf{F}'\mathbf{F}) \cong \mathcal{N}_p(\mathbf{0}; \hat{\sigma}_e^2 \hat{\mathbf{F}}'\hat{\mathbf{F}}) \quad (3.4.3)$$

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{FGNLS} - \beta) \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{0}; \hat{\sigma}_e^2 [\hat{\mathbf{F}}'\hat{\Sigma}^{-1}\hat{\mathbf{F}}]^{-1}) \quad (3.4.4).$$

Capítulo Cuatro. *Resultados*

Capítulo Cuatro

4. Resultados

Los siguientes puntos detallan los resultados que se obtuvieron al aplicar los enfoques y metodologías especificadas en el capítulo precedente. Puntualmente, se presentan la selección y los ajustes de las funciones de transición globales del vector de estado y de la función de salida y, además, se describen las distribuciones estimadas de los coeficientes. El apartado de simulación corresponde a la descripción de la población generada y de la muestra obtenida, así como también los perfiles de la sección transversal a partir de aplicar el MCF y los procesos de dependencia resultantes. Finalmente, se denotan los resultados de la estimación de la función de ahusamiento dinámica estudiada y se enfoca en la comparación de los estimadores NLS vs FGNLS.

4.1. Modelo de crecimiento

4.1.1. Curva de rendimiento (transición) del diámetro normal

La evolución de los diámetros observados en función de la edad se presenta en la Figura 5. La misma muestra consistencia con el modelo BOD dado que se aprecia un crecimiento acelerado al inicio que luego se torna asintótico a un máximo biológico. Mediante el gráfico se observó que es esperable un valor de asíntota cercano a 25 cm, el cual se alcanza cerca de los 7 a 8 años, con un desvío estándar de aproximadamente 4 cm. En tanto, el valor de escala promedio se aproxima a 2 cm ($\pm 0,5$ cm), según se dedujo de observar que en la porción de edades en que el crecimiento se asemeja más a una función lineal, es esperable una pendiente de equivalente valor.

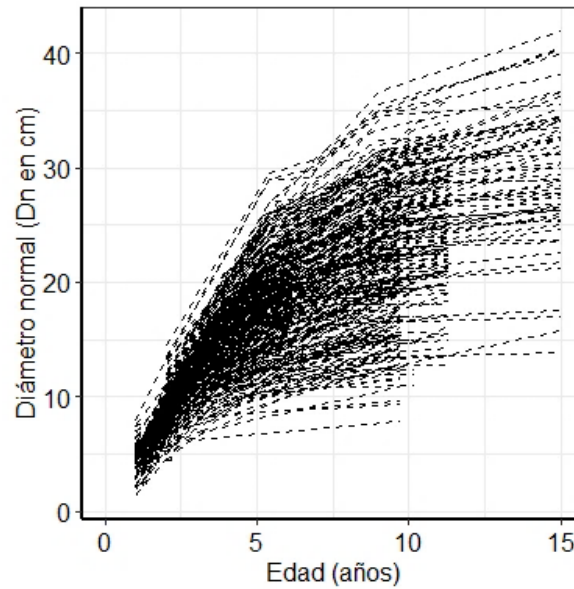


Figura 5. Evolución del D_n individual observado en PMP de *Eucalyptus grandis* plantado en suelos arenosos del sudoeste de Corrientes (Argentina).

En la Tabla 2 se aprecian los valores que se obtuvieron de los criterios de selección de modelos para cada variante considerada del modelo BOD. Las mismas corresponden a:

- BOD: coeficientes fijos y errores independientes de variancia común.
- BOD II: modelo homoscedástico de observaciones independientes con ambos coeficientes aleatorios.
- BOD III: modelo de coeficientes aleatorios, varianza heteroscedástica ajustada con función potencial y autocorrelación MA(1) de los errores.
- BOD IV: similar a BOD III pero con estructura de correlación autorregresiva de orden 1 (AR (1)).

Tabla 2. Medidas de la calidad relativa para las variantes del modelo BOD ajustados a los datos de PMP

Modelo	C	AIC	BIC
BOD	0,742	11525,1	11542,9
BOD II	0,987	8077,9	8111,8
BOD III	0,985	7761,7	7806,8
BOD IV	0,984	7768,4	7813,5

En función de estos valores se seleccionó la tercera variante, que presentó los valores más bajos de verosimilitud y equivalente comportamiento en el parámetro de correlación entre valores predichos y observados. Si bien la modelización de la dependencia temporal de

los residuos no implicó mejoras en el indicador C, se observó que el AIC se redujo aproximadamente 316 puntos y el BIC 305. La exploración gráfica de los residuos, Figura 19 en Anexo A, indicó que es factible el cumplimiento de los supuestos distribucionales del error, $\mathbf{e} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}; \sigma_e^2 \mathbf{\Sigma})$. Las estimaciones de los parámetros de la estructura de autocorrelación generó los siguientes resultados: la variancia residual estimada $\widehat{\sigma_e^2} = 5,68 \text{ cm}^2$, el parámetro del modelo autorregresivo de media móvil $\hat{\xi} = 0,35$ tal que $\widehat{e_{it}} = 0,35e_{it-1} + u_{it}$, la potencia correspondiente al modelo de variancia $\hat{\gamma} = -0,56$. En tanto la Tabla 3 presenta la estimación de los coeficientes fijos acompañados por las correspondientes pruebas de significancia.

Tabla 3. Medias de los coeficientes del modelo BOD III, estimadas para el *Dn* de *Eucalyptus grandis* en Corrientes (Argentina) medido en PMP

Parámetro	Valor Estimado	EE	gl	<i>t</i>	<i>p</i>
α_1	25,21 cm	0,381 cm	1683	66,13	<0,0001
α_2	-1,366	0,016	1683	-82,48	<0,0001

EE corresponde al error de estimación, gl denota grados de libertad, *t* el valor del estadístico de la prueba y *p* su correspondiente valor de probabilidad.

En la ecuación (3.4.5) se presenta la distribución estimada del vector de coeficientes $\hat{\theta}_i^D$ y se denotan las estimaciones obtenidas de los parámetros distribucionales, los elementos de la matriz de varianzas-covarianzas se enuncian mediante Λ_{pq} . En tanto que en la Tabla 4 se muestran los intervalos de confianza al 95% de los parámetros estimados.

$$\begin{pmatrix} \theta_{1i} \\ \theta_{2i} \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \Lambda_{11}^2 & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22}^2 \end{pmatrix} \right] \equiv \mathcal{N} \left[\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \Lambda_{11}^2 & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22}^2 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 25,21 \text{ cm} \\ -1,36 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 53,6 \text{ cm}^2 & -1,7 \text{ cm} \\ -1,7 \text{ cm} & 0,07 \end{pmatrix} \right] \quad (3.4.5)$$

Tabla 4. Intervalos de confianza al 95% de los parámetros del modelo BOD III estimados con datos de PMP en *Eucalyptus grandis* de suelos arenosos de Corrientes (Argentina)

Parámetro	Li	Ls	Parámetro	Li	Ls
α_1 (cm)	24,47	25,96	$\text{corr}(\tilde{a}_{1i}, \tilde{a}_{2i})$	-0,894	-0,824
α_2	-1,39	-1,33	ξ	0,286	0,412
Λ_{11}^2 (cm ²)	46,18	62,29	γ	-0,633	-0,485
Λ_{22}^2	0,014	0,090	σ^2 (cm ²)	2,136	2,659

Li y Ls corresponden a Límite Inferior y Superior respectivamente, *corr*(.) enuncia la correlación.

En la Tabla 5 se presentan las medidas que resumen las 393 predicciones que se obtuvieron para los coeficientes aleatorios del modelo BOD III. Los valores predichos de los Dn individuales se presentan gráficamente en la Figura 6 que acompaña la mencionada tabla. En la gráfica se puede apreciar la fuerte correlación negativa entre los valores predichos del coeficiente de asíntota y el de escala: cuanto más baja es el valor de la primera más temprana es la edad a la que se alcanza.

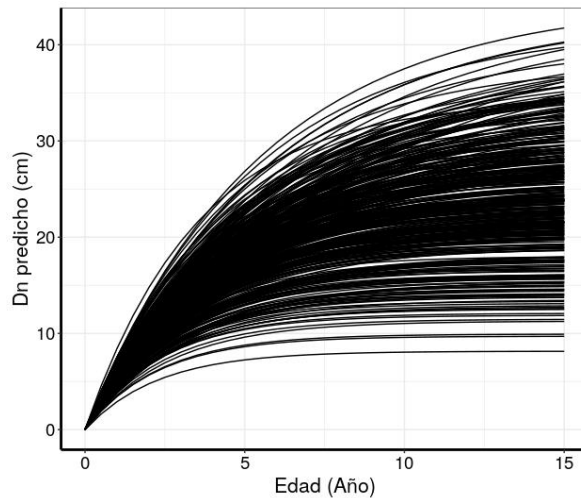


Figura 6. Predicción del Dn individual de *Eucalyptus grandis* mediante el modelo BOD III.

Tabla 5. Resumen de coeficientes aleatorios predichos por el modelo BOD III.

	$\tilde{\theta}_{1i}$ (cm)	$\tilde{\theta}_{2i}$
Mínimo	8,16	-2,11
Q ₁	20,47	-1,52
Mediana	24,49	-1,34
Media	25,21	-1,37
Q ₃	29,65	-1,22
Máximo	44,45	-0,82

4.1.2. Función hipsométrica

La Figura 7 permite observar la relación entre la altura total y el Dn predicho mediante el modelo BOD III. Esta exploración gráfica supone una relación lineal entre la Ht y la predictora. De acuerdo a esta exploración se adicionó a los modelos explicitados el ajuste de un modelo lineal mixto.

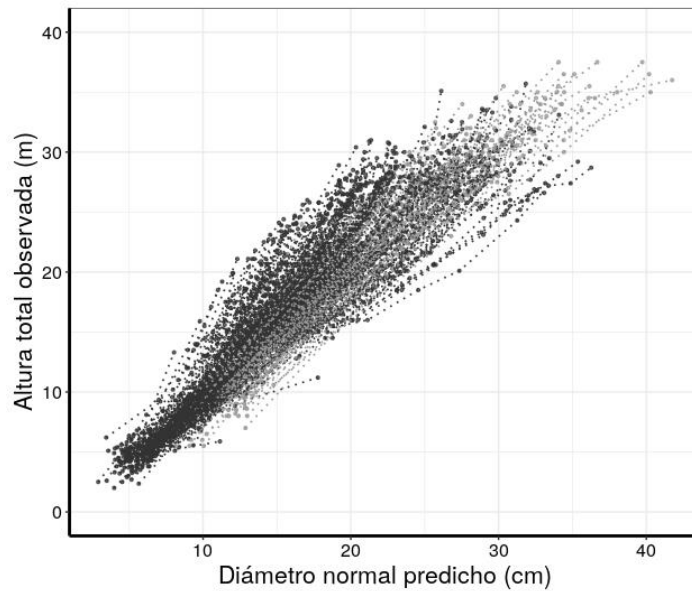


Figura 7. Relación Hipsométrica de la H_t observada con el D_n predicho del modelo BOD III en datos de *Eucalyptus grandis* colectados en PMP de Corrientes (Argentina).

Las variantes de los modelos que se ajustaron de acuerdo a la especificación de las estructuras de variancia y covariancia, dentro y entre árboles, se presentan en la Tabla 6, en la que se muestran las medidas de los criterios de verosimilitud y los valores del indicador C. Las denominaciones de los modelos enunciados en la Tabla 6 corresponden a $M1$: Regresión lineal con pendiente aleatoria, $M2$: similar a $M1$ incluyendo la estructura de correlación autorregresiva de media móvil de segundo grado ($q_2 = 2$), $M3$: Prodan fijo, $M4$: ecuación de Prodan con ambos parámetros aleatorios y estructura de correlación general, $M5$: Schreuder fijo, $M6$: Schreuder con coeficiente lineal fijo (θ_3), θ_{4i} aleatorio y dependencia autorregresiva de primer orden ($q_1 = 1$), $M7$: Wykoff fijo, $M8$: función de Wykoff con ambos coeficientes aleatorios, estructura de autocorrelación general y modelo la variancia potencial, $M9$: Larson sin efectos aleatorios, $M10$: Larson con ambos coeficientes aleatorios, modelo potencial de la variancia y dependencia temporal desestructurada.

Tabla 6. Performance de las funciones hipsométricas ajustadas a *Eucalyptus grandis* cultivado en suelos arenosos de Corrientes (Argentina)

Modelo	C	AIC	BIC
M1	0,95	9399,77	9422,27
M2	0,88	8477,27	8527,88
M3	0,88	9980,30	9997,18

M4	0,96	7888,57	8091,06
M5	0,86	10289,45	10306,32
M6	0,98	7756,76	7784,89
M7	0,89	9892,86	9909,74
M8	0,95	7829,98	7832,46
M9	0,84	10636,89	10653,77
M10	0,98	8287,55	8338,17

Los criterios de verosimilitud penalizada indicaron que el modelo más verosímil para predecir la altura resultó el M6, para el cual se sostienen los supuestos distribucionales planteados conforme al análisis gráfico presentado en la Figura 20 del Anexo A. Diagnóstico en el ajuste de funciones del MCF. Este modelo corresponde al formulado por Schreuder con θ_4 aleatorio, variancia homoscedástica y estructura de correlación AR(1). El valor de C fue elevado (0,98), lo cual indica que la capacidad predictiva del modelo es muy buena, mientras que los valores obtenidos de AIC y BIC correspondieron a 7756 y 7784, respectivamente. La variancia estimada del coeficiente aleatorio θ_{4i} resultó en 0,0062, mientras que la del error ($\widehat{\sigma}_e^2$) fue de 1,602 m² y el parámetro de correlación estimada ($\hat{\rho}$) arrojó un valor de 0,44. Los valores estimados de los coeficientes fijos se denotan en la Tabla 7. En la misma se presentan los valores de EE obtenidos para los mismos y la prueba de significancia correspondiente.

Tabla 7. Coeficientes fijos y prueba de significancia estimados de M6 ajustado en *Eucalyptus grandis*.

Coeficientes	Estimación	EE	gl	t	p
$\hat{\alpha}_3$	0,288 m cm ⁻¹	0,0080 m cm ⁻¹	1654	35,8	<0,0001
$\hat{\alpha}_4$	1,444	0,0102	1654	141,9	<0,0001

EE es el Error de Estimación, gl enuncia los grados de libertad, t el estadístico de la prueba y p su valor de probabilidad asociado bajo hipótesis nula.

La distribución del coeficiente θ_{4i} se estimó tal que:

$$\theta_{4i} \sim \mathcal{N}(1,44 ; 0,0062), \quad (3.4.6)$$

los predichos del mismo (condicional a los datos) se obtuvieron con un mínimo de 1,274 y un máximo de 1,671, mientras que el 75% de los valores se concentraron ente 1,38 y 1,49.

La Figura 8 permite observar la predicción de la Ht mediante el modelo seleccionado (M6), mientras que la estimación de intervalos confianza de los parámetros del modelo a un 95% se denotan en la Tabla 8.

Tabla 8. Intervalos de confianza de los parámetros de $M6$ estimados con los datos de PMP de *Eucalyptus grandis*

Parámetro	Li	Ls
α_3 (m cm ⁻¹)	0,270	0,304
α_4	1,420	1,464
Λ_4^2	0,005	0,007
ρ	0,378	0,510
σ_e^2 (m ²)	1,411	1,780

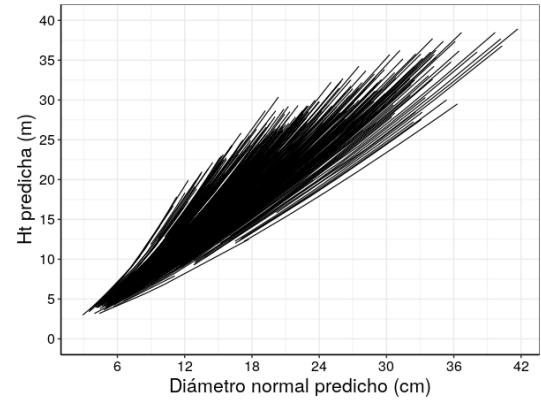


Figura 8. Predicción de Ht de *Eucalyptus grandis* mediante el modelo M6.

4.1.3. Función de salida del MCF

Tal como se expresó previamente, la función de salida que se ajustó corresponde a una función de ahusamiento estática. En la Tabla 9 se presenta el comportamiento de los criterios de selección de los modelos ajustados. En la misma se denotan los resultados para la variante de modelo fijo y la correspondiente al modelo mixto para las funciones propuestas por Bi (Bi 2000, Bi y Long 2001) y por Kozak (1988, 2004). El último enfoque, MNLM, permitió considerar diferentes estructuras de la matriz \mathbf{B} que modela la variabilidad entre individuos. A su vez, se modeló la variabilidad dentro de individuos y para facilitar la presentación/lectura se denotan los modelos más promisorios de cada caso. Que resultaron ser:

- MNLM de Bi y Long (2001): matriz de diseño de coeficientes fijos equivalente a la de coeficientes aleatorios, tal que $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{I}_7$.
- MNLM de Kozak (1988): vector de coeficientes aleatorios definido por $\mathbf{b} = (b_3, b_4, b_7)'$, matriz de covarianzas de efectos aleatorios saturada, dependencia de los errores ajustado mediante ARMA(2,2).
- MNLM de Kozak (2004): con $\mathbf{b} = (b_4, b_5, b_8, b_9)'$ y correlación entre efectos aleatorios distinta de cero, dependencia autorregresiva de segundo orden.

Tabla 9. Criterios de selección de las funciones de ahusamiento ajustadas a los datos de cubicaciones de árboles de *Eucalyptus grandis*

Modelo	C	AIC	BIC
Bi y Long (2001)	0,988	16653,3	16704,8
Bi y Long (2001) mixto	0,991	15677,0	15793,1
Kozak (1988)	0,989	15469,1	15507,8
Kozak (1988) mixto	0,997	9886,5	10009,0
Kozak (2004)	0,990	15407,2	15471,7
Kozak (2004) mixto	0,998	9450,6	9618,3

En todos los casos los modelos mixtos presentan las mejores performances en los criterios de selección. Se seleccionó la variante de coeficientes aleatorios de la función modificada de Kozak (2004). El modelo de dependencia estimado corresponde a $\widehat{e}_{i(h)} = 1,08e_{i(h-1)} - 0,17e_{i(h-2)} + u_{i(h)}$, donde el subíndice indexado h indica la posición en el fuste a la que se realiza la medición/estimación. En tanto, la variancia estimada del error corresponde a $\widehat{\sigma}_e^2 = 0,42 \text{ cm}^2$. En la Tabla 10 se observan las estimaciones correspondientes a la componente fija de los coeficientes del modelo seleccionado. En ella se presenta la prueba de hipótesis de acuerdo a la cual el único coeficiente que estadísticamente no es diferente a cero corresponde a β_3 .

Tabla 10. Coeficientes fijos del modelo modificado de Kozak (2004) estimados en perfiles de ahusamiento de *Eucalyptus grandis* en suelos arenosos de Corrientes (Argentina)

	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9
Estimación	1,027	0,981	-0,011	0,109	-1,008	0,079	6,651	0,046	-0,172
EE	0,031	0,008	0,013	0,014	0,123	0,029	0,703	0,003	0,008
<i>t</i>	32,7	129,06	-0,822	7,922	-8,211	2,732	9,457	17,32	-22,49
<i>P</i>	<0,000	<0,0001	0,411	<0,000	<0,000	<0,006	<0,000	<0,000	<0,000

EE: error estándar de estimación, p valor de probabilidad asociado a t .

En la Figura 9 se denotan los 284 perfiles predichos por el modelo de ahusamiento ajustado, Kozak (2004) mixto, que, en contraste con los perfiles observados (Figura 3), el análisis de los supuestos distribucionales (Figura 21 de Anexo A) y el comportamiento de los criterios de selección aseguran la adecuada capacidad predictiva del mismo.

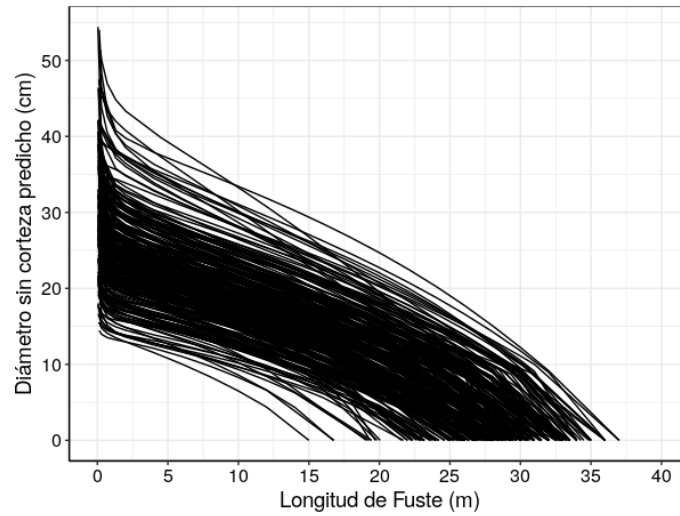


Figura 9. Predicción del ahusamiento del diámetro de *Eucalyptus grandis* mediante el modelo ajustado de Kozak (2004).

En la Tabla 11 se resumen los valores predichos de los coeficientes aleatorios de la función de Kozak (2004). En ella se presentan los valores máximos, mínimos y promedios. En la expresión (3.4.7) se expresa formalmente la distribución estimada del vector de coeficientes aleatorios.

Tabla 11. Resumen de los coeficientes aleatorios predichos de la función de ahusamiento de Kozak (2004) ajustada a perfiles diamétricos de *Eucalyptus grandis*

	b_4	b_5	b_8	b_9
Mínimo	-0,213	-3,401	-0,046	-0,512
Promedio	0,109	-1,008	0,046	-0,172
Máximo	0,386	0,893	0,170	0,054

$$\begin{pmatrix} \theta_4^d \\ \theta_5^d \\ \theta_8^d \\ \theta_9^d \end{pmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0,109 \\ -1,008 \\ 0,046 \\ -0,172 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0,018 & 0,02 & -0,001 & 0,004 \\ 0,02 & 0,659 & -0,032 & 0,083 \\ -0,001 & -0,032 & 0,002 & -0,004 \\ 0,004 & 0,083 & -0,004 & 0,011 \end{bmatrix} \right) \quad (3.4.7)$$

4.2. Simulación

El procedimiento de simulación descrito en la sección 3.3, presentado gráficamente mediante el esquema que se muestra en Figura 4 se implementó con las distribuciones de

muestreo obtenidas a partir del ajuste del MCF a los datos de *E. grandis* especificado en la sección precedente (ver sección 4.1). Específicamente, se utilizó la distribución del vector de coeficientes de la función de rendimiento del diámetro normal que se enuncia en la expresión (3.4.5), para la función de altura total en (3.4.6) y en (3.4.7) para el vector de coeficientes aleatorios de la ecuación de ahusamiento estática. Se generó una población de 5,6 millones de vectores de coeficientes aleatorios del vector de estado, $\theta^x = (\theta^D, \theta^H)'$, y de la función de salida, θ^d , cada uno de ellos representando el MCF de un individuo. Dicha cantidad aseguró que la diferencia conjunta entre los parámetros distribucionales empíricos, aquellos que se definieron en las ecuaciones ya enunciadas, y los generados mediante la simulación fuera menor o igual a 10^{-5} .

En la Figura 10 se presenta la curva de error de muestreo del coeficiente de la asíntota (θ_{li}) de la función de rendimiento del Dn . Este coeficiente determina el rendimiento final del Dn , variable que condiciona el comportamiento de las restantes variables y componentes del sistema forestal que se modeló. La línea sólida denota la regresión local con parámetro de suavizado de 0,2. Se determinó que con cinco mil vectores muestreados el error de muestreo resulta en 0,1 cm; a partir de dicho valor la disminución del error es despreciable respecto al esfuerzo de muestreo. La gráfica (Figura 10) denota que es necesario muestrear 2,5 mil individuos más para obtener un error de 0,09 cm. Además, el tamaño de muestreo seleccionado genera un error de muestreo equivalente al de medición, lo cual se consideró aceptable.

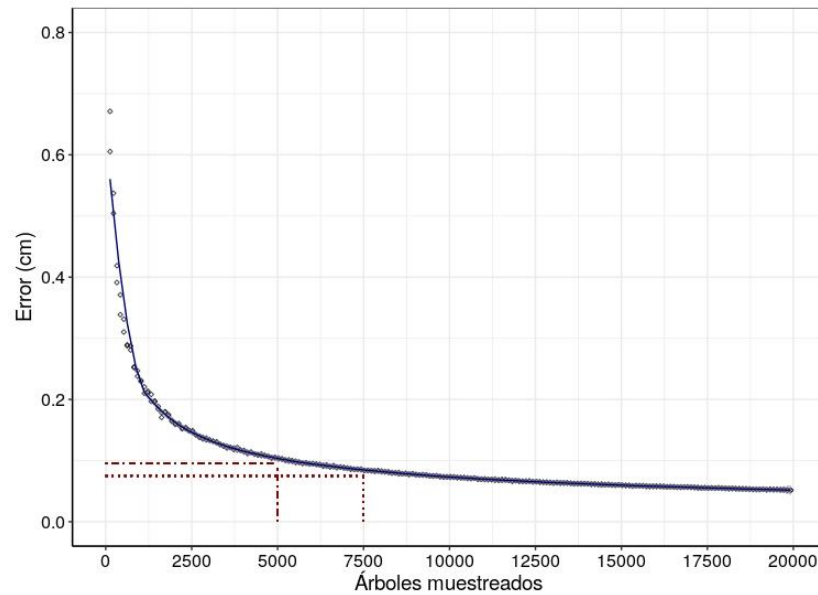


Figura 10. Curva del error de muestreo sobre el coeficiente de asíntota (θ_{II}) de la función de transición del Dn (BOD III) elaborada para determinar el tamaño de la muestra.

Conforme a la especificación de la curva del error de muestreo, descrita previamente, se obtuvo una muestra del tamaño especificado. En las siguientes figuras se muestran las distribuciones de los coeficientes en dicha muestra. En la Figura 11A se denota la distribución conjunta de los coeficientes aleatorios de la función de rendimiento del Dn mientras que en la Figura 11B se grafica la función de distribución del coeficiente aleatorio de la relación hipsométrica.

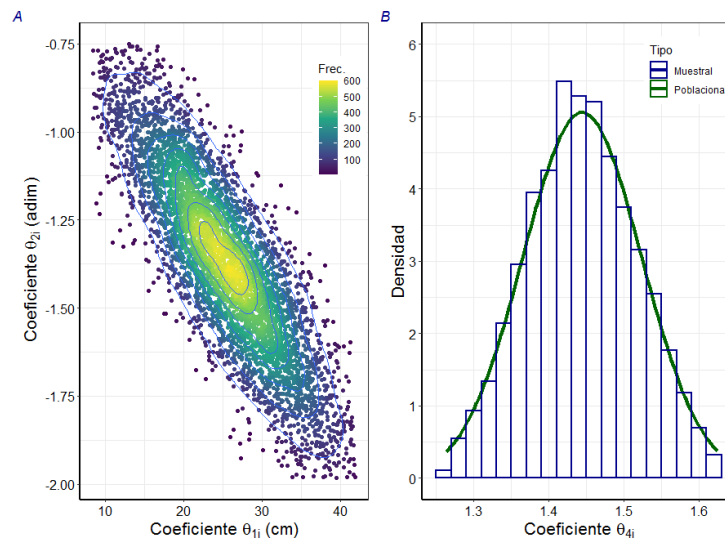


Figura 11. Contraste de las distribuciones probabilísticas muestrales y poblacionales de los coeficientes del modelo BOD (A) y de la relación hipsométrica (B). Distribuciones poblacionales en líneas sólidas, muestrales en puntos (A) e histograma (B).

En la Figura 12 se muestran los gráficos de las distribuciones de los coeficientes de la función de salida. Los histogramas ubicados en la diagonal principal corresponden a las distribuciones univariadas, en tanto por debajo de la misma se grafican las distribuciones bivariadas. Las líneas sólidas representan las distribuciones poblacionales. En todos los gráficos se observa una distribución adecuada de los coeficientes en la muestra.

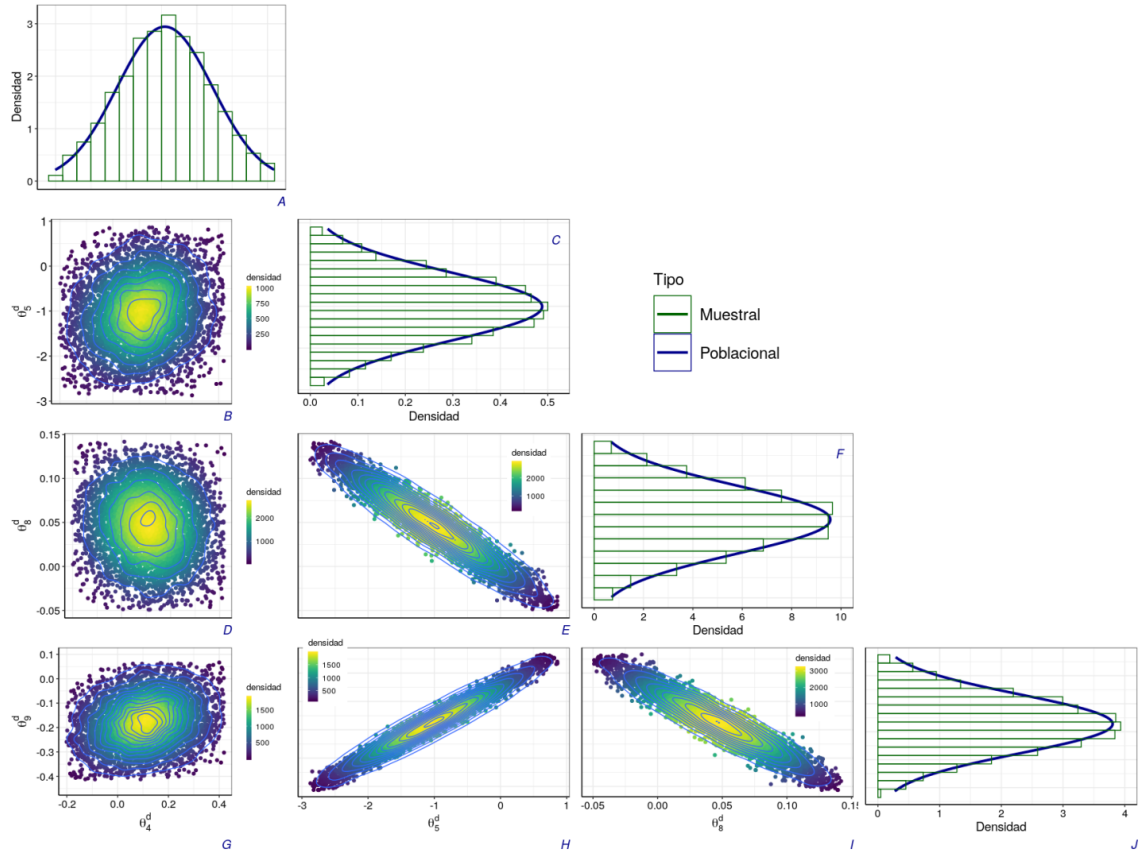


Figura 12. Distribuciones muestrales y poblacionales de los coeficientes de la función de salida del MCF obtenidos por simulación. Distribuciones univariadas de θ_4^d (A), θ_5^d (C), θ_8^d (F) y θ_9^d (J); bivariadas de $\theta_4^d - \theta_5^d$ (B), $\theta_4^d - \theta_8^d$ (D), $\theta_4^d - \theta_9^d$ (G), $\theta_5^d - \theta_8^d$ (E), $\theta_5^d - \theta_9^d$ (H) y $\theta_8^d - \theta_9^d$ (I). Puntos e histogramas representan distribuciones muestrales, líneas sólidas las poblacionales.

En la Figura 13 se denota gráficamente la simulación del crecimiento de los cinco mil árboles a partir de los coeficientes muestreados de las distribuciones descriptas en la Figura 11 y la Figura 12. La curva de rendimiento del Dn y la relación hipsométrica que determina la Ht , Figuras 13A y 13B, resultaron de especificar el vector de estado para edades de 0 a 15 años y emplear los coeficientes simulados y las funciones del vector de estados del MCF especificado en los apartados previos. De forma equivalente, la Figura 13C denota los perfiles diamétricos que se calcularon mediante la función de salida específicamente para los 9, 12 y

15 años (vector \mathbf{t}); para cada individuo se constituyeron tres perfiles de ahusamiento expresados en diámetros. El resultado graficado en la Figura 13D corresponde a los perfiles de ahusamiento de las secciones transversales a lo largo del fuste obtenidos mediante la simple transformación de los datos de ahusamiento diamétrico.

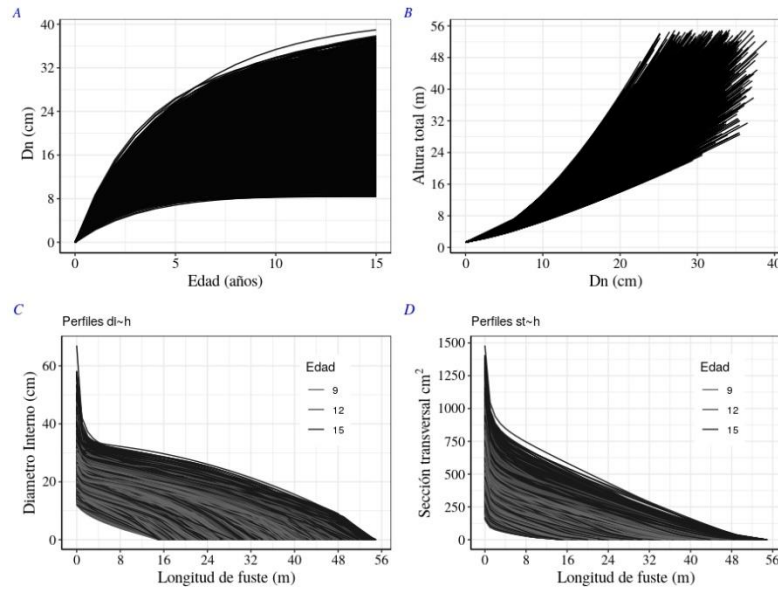


Figura 13. Crecimiento simulado de 5 mil árboles de *Eucalyptus grandis*: (A) rendimiento del D_n , (B) relación hipsométrica, (C) ahusamiento diamétrico y (D) ahusamiento de la sección transversal.

La curva de ahusamiento de la sección transversal presentada en la Figura 13D se generó con 327.683 pares de datos $\{st, h\}$, tal que \mathbf{h} corresponde al vector particionado $\mathbf{h} = (\mathbf{h}_{1(9)}, \mathbf{h}_{1(12)}, \mathbf{h}_{1(15)}, \dots, \mathbf{h}_{i(E)}, \dots)$ y $\mathbf{h}_{i(E)}$ denota el vector de longitudes discretas de fuste del i -ésimo individuo a la edad E , tal que $\mathbf{h}_{i(E)} = (0, 1, 2, \dots, h, \dots, Ht_{i(t)})$.

La Figura 14 resume el resultado de la simulación de los procesos estocásticos autorregresivos que posteriormente se adicionaron a los perfiles mediante la estructura de “medición” (\mathbf{h}) descrita brevemente en el párrafo precedente. Estos procesos son los autorregresivos de primer, AR(1), y segundo orden, AR(2), que se detallaron en el apartado 3.3 (ver Proceso AR (1) y Proceso AR (2)). No se discriminan por magnitud de variancia dado que son equivalentes y resulta redundante.

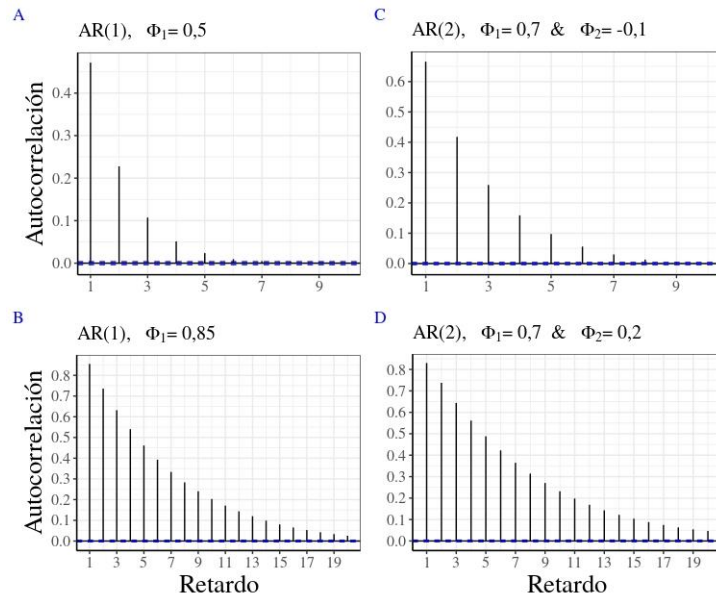


Figura 14. Función de autocorrelación de los procesos autorregresivos simulados en perfiles de ahusamiento de la sección transversal individual, Procesos AR(1) de baja autocorrelación con $\phi_1 = 0,5$ (A) y elevada autocorrelación con $\phi_2 = 0,85$ (B), y Procesos AR(2) de autocorrelación baja con $\phi_1 = 0,7$ y $\phi_2 = -0,1$ (C) y elevada con $\phi_1 = 0,7$ y $\phi_2 = 0,2$ (D).

4.3. Estimaciones y estimadores NLS vs. FG-NLS

En las siguientes tablas se presentan los estadísticos que permiten evaluar el comportamiento de los modelos de ahusamiento ajustados, derivados de la expresión general de García (2015), sobre los datos generados por la simulación. Estas evaluaciones se realizan en función de los escenarios planteados mediante la conjunción de los procesos autorregresivos simulados y de las diferentes estructuras de medición. En particular, permiten comparar los resultados de acuerdo a la intensidad del proceso de dependencia, por un lado, y de acuerdo a la estructura de medición, en longitudes de corte (L_c) de 1 m vs. 3 m, por otro.

En la Tabla 12 se presentan los resultados de validación para los escenarios con procesos AR(1) de variancia de 40^2 cm^4 (variancia baja). Tanto para la situación de autocorrelación baja ($\phi_1 = 0,5$) como en autocorrelación elevada ($\phi_1 = 0,85$), los estadísticos RMSE y C no varían entre las diferentes estructuras de medición (L_c de 1 m vs de 3 m) y mejoran levemente en el modelo exponencial-general (0,961 vs. 0,960 del modelo exponencial-exponencial). En tanto, la media del error de estimación (\bar{E}) presentó mejores resultados con el estimador FG-NLS. Se observa que el mismo denotó menor magnitud con L_c de 1 m si la autocorrelación es baja; e.g., con el modelo exponencial-general se obtuvo

0,006 cm² en L_c de 1m y 0,013 cm² cuando L_c es de 3 m. De forma contrapuesta, en la validación de la estimación FGNLS del modelo exponencial-general con autocorrelación elevada, el valor absoluto de \bar{E} se redujo con el incremento de la distancia entre observaciones. Obsérvese que resultó de 0,012 cm² y 0,003 cm² con L_c de 1 m y 3 m, respectivamente. FGNLS presenta sesgo significativo con ambos modelos en la mayor L_c bajo autocorrelación baja y en el modelo exponencial-general en autocorrelación elevada a $L_c = 1$ m. Por otra parte, se debe destacar que el valor de \bar{E} en las estimación NLS resultó significativamente distinto a cero en todos los casos, sesgo que se incrementa con la distancia.

Tabla 12. Resultados de la validación de las estimaciones de ahusamiento en los escenarios con proceso AR(1) de variancia de 40² cm⁴

Modelo	L_c	ME	Autocorrelación baja			Autocorrelación elevada		
			\bar{E}	C	RMSE	\bar{E}	C	RMSE
Exponencial-exponencial.	1m	NLS	0,024**	0,960	41,95	0,028**	0,959	42,50
	1m	FGNLS	0,002	0,960	41,99	-0,004	0,958	42,99
	3m	NLS	0,027**	0,960	41,96	0,030**	0,959	42,51
	3m	FGNLS	0,025**	0,960	41,96	0,005	0,959	42,51
Exponencial-general.	1m	NLS	0,013**	0,961	41,8	0,018**	0,959	42,34
	1m	FGNLS	0,006	0,961	41,8	-0,012**	0,959	42,33
	3m	NLS	0,015**	0,961	41,8	0,018**	0,959	42,35
	3m	FGNLS	0,013**	0,961	41,8	0,003	0,959	42,34

L_c : longitud de corte; ME: método de estimación; \bar{E} : media del error de estimación en cm²; C: correlación entre datos observados y estimados; RMSE: raíz cuadrada de la media del cuadrado del error de estimación en cm².

** valor estadísticamente distinto a cero.

En la Figura 15 se contrastan los resultados especificados en la Tabla 12 y permiten mejorar la comprensión de lo expresado anteriormente. Obsérvese como, en el modelo exponencial-general, el error de las estimaciones NLS siempre se incrementó cuando L_c pasa de 1 a 3 m, en tanto que el comportamiento de las estimaciones FGNLS variaron conforme a la magnitud de la dependencia entre observaciones: en L_c de 3 m el error aumentó en el escenario de autocorrelación baja ($\phi_1=0,5$) (Figura 15 b) y disminuyó en el de dependencia elevada ($\phi_1=0,85$) (Figura 15 d).

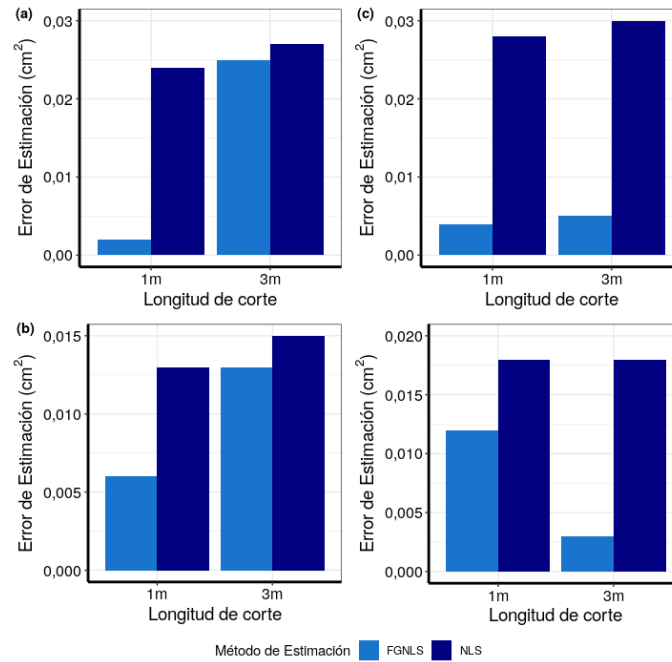


Figura 15. Valor absoluto de la media del error de estimación de los modelos de ahusamiento dinámicos en la validación de los métodos NLS y FG-NLS en los escenarios AR(1) con variancia de 40^2cm^4 . Modelo exponencial-exponencial en escenario de autocorrelación $AR(\phi_1 = 0,5)$ (a) y $AR(\phi_1 = 0,85)$ (c); modelo exponencial-general $AR(\phi_1 = 0,5)$ (b) y $AR(\phi_1 = 0,85)$ (d).

Los estadísticos de la validación en los escenarios con proceso autorregresivo de primer orden con variancia de 80^2cm^4 se presentan en la Tabla 13. Se observan comportamientos similares a los obtenidos en el caso de variancia de 40^2cm^4 , dado que los indicadores C y RMSE no variaron entre métodos de estimación y longitud de corte dentro de una misma intensidad de autocorrelación, ni entre las expresiones del modelo de ahusamiento dinámico. Se observa que nuevamente las estimaciones FG-NLS resultaron significativamente sesgadas en autocorrelación baja con ambos modelos para $L_c = 3 \text{ m}$, y en autocorrelación elevada en el modelo exponencial-exponencial a 1 m de L_c .

Tabla 13. Resultados de la validación de las estimaciones de ahusamiento en los escenarios con proceso AR(1) de variancia de 80^2 cm^4

Modelo	L_c	ME	Autocorrelación baja			Autocorrelación elevada		
			\bar{E}	C	RMSE	\bar{E}	C	RMSE
Exponencial-exponencial	1m	NLS	0,025**	0,873	77,50	1,760**	0,875	76,68
	1m	FGNLS	0,003	0,873	77,53	-0,040**	0,873	77,10
	3m	NLS	0,029**	0,873	77,51	2,001**	0,875	76,70
	3m	FGNLS	0,025**	0,873	77,51	-0,002	0,874	76,71
Exponencial-general	1m	NLS	0,017**	0,874	77,18	1,103**	0,875	76,49
	1m	FGNLS	0,008	0,874	77,18	-0,006	0,875	76,48
	3m	NLS	0,018**	0,874	77,19	1,165**	0,875	76,50
	3m	FGNLS	0,015**	0,874	77,19	-0,001	0,875	76,48

L_c : longitud de corte; ME: método de estimación; \bar{E} : media del error de estimación en cm^2 ; C: correlación entre datos observados y estimados; RMSE: raíz cuadrada de la media del cuadrado del error de estimación en cm^2 .

** valor estadísticamente distinto a cero.

En la Figura 16

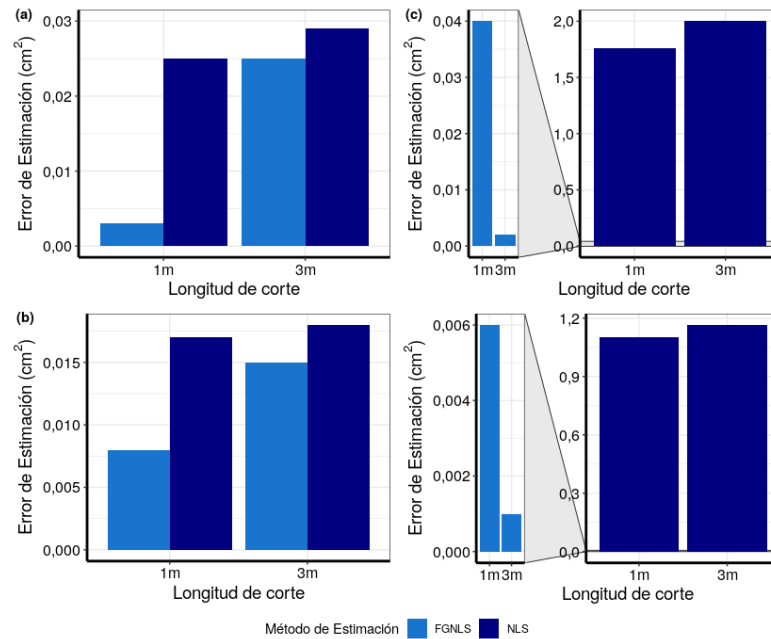


Figura 16 se denotan gráficamente los valores de sesgo, presentados en la

Tabla 13. En la misma se observa como el valor de \bar{E} de la estimación NLS, que es siempre significativamente distinto a cero (ver Tabla 13), se incrementó conforme al aumento de L_c en las dos intensidades de autocorrelación ($\phi_1 = 0,5$ y $\phi_1 = 0,85$) con ambos modelos, modelo exponencial-exponencial y exponencial-general. El mismo efecto se presenta en las estimaciones FGNLS con dependencia baja, gráficos (a) y (b) de la Figura 16, y el efecto opuesto en autocorrelación elevada, gráficos (c) y (d) de la Figura 16. Nótese que en el escenario de autocorrelación elevada las diferencias entre los métodos de estimación se incrementaron notablemente, tal que en el modelo exponencial-general con L_c de 1 m, la diferencia pasó de 0,009 a 1,097 al incrementarse la magnitud de la dependencia de 0,5 a 0,85.

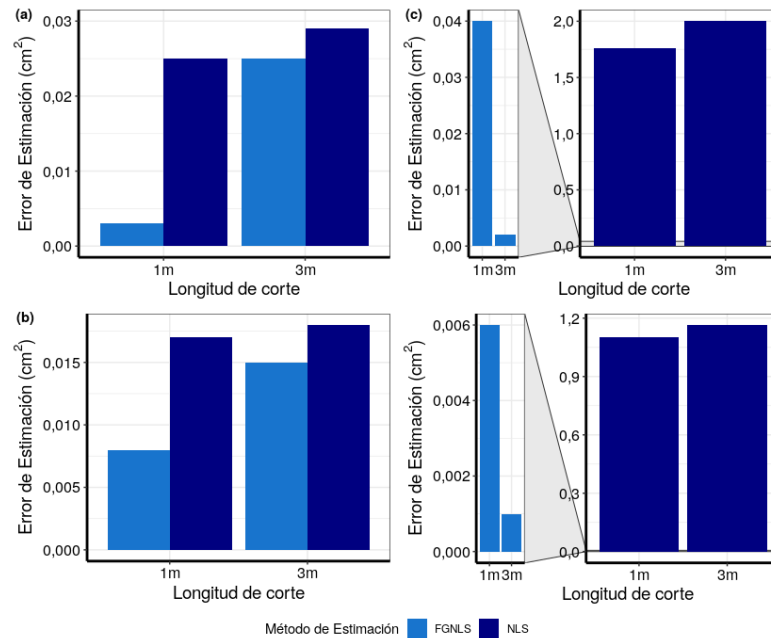


Figura 16. Valor absoluto de la media del error de estimación de los modelos de ahusamiento dinámicos en la validación de los métodos NLS y FGNLS en los escenarios AR(1) con variancia de 80^2cm^4 . Modelo exponencial-exponencial en escenario de autocorrelación AR($\phi_1 = 0,5$) (a) y AR($\phi_1 = 0,85$) (c); modelo exponencial-general AR($\phi_1 = 0,5$) (b) y AR($\phi_1 = 0,85$) (d)

La validación de las estimaciones obtenidas en los escenarios simulados con procesos autorregresivos de segundo orden se denota en la Tabla 14 y 15. Al igual que en el proceso enunciado en los puntos anteriores, los indicadores C y RMSE no denotaron diferencias entre estructuras de medición para ambos métodos de estimación. En la Tabla 14, escenario de variancia de 40^2cm^4 , se puede observar que en el modelo exponencial-general el indicador C fue de 0,962 independientemente a la longitud de corte, al método de estimación y a la

magnitud de la dependencia entre observaciones. Mientras que RMSE solo varió entre las magnitudes de dependencia baja y alta, 41,6 cm² y 41,1 cm², respectivamente, en el modelo exponencial-general. Los valores de \bar{E} fueron significativos en la estimación NLS en todos los casos. La Tabla 14 permite observar que en la estimación FGNLS se obtuvieron resultados diferentes de \bar{E} entre modelos de ahusamiento, ej.: en autocorrelación baja con L_c de 1m el modelo exponencial-exponencial el valor fue de -0,017 cm² y significativamente distinto a cero, mientras que para la misma circunstancia en el modelo exponencial-general el resultado fue -0.001 cm² y las evidencias estadísticas no permiten desechar la hipótesis de igualdad al cero.

Tabla 14. Resultados de la validación de las estimaciones de ahusamiento en los escenarios con proceso AR(2) de variancia de 40² cm⁴

Modelo	L_c	ME	Autocorrelación baja			Autocorrelación elevada		
			\bar{E}	C	RMSE	\bar{E}	C	RMSE
Exponencial-exponencial	1m	NLS	1,055**	0,962	41,7	1,109**	0,962	41,3
	1m	FGNLS	-0,017**	0,961	41,8	-0,037**	0,962	41,6
	3m	NLS	1,177**	0,962	41,7	1,158**	0,962	41,3
	3m	FGNLS	0,022**	0,962	41,7	0,004	0,962	41,3
Exponencial-general	1m	NLS	0,576**	0,962	41,6	0,624**	0,962	41,1
	1m	FGNLS	-0,001	0,962	41,6	-0,008*	0,962	41,1
	3m	NLS	0,641**	0,962	41,6	0,603**	0,962	41,1
	3m	FGNLS	0,011*	0,962	41,6	0,002	0,962	41,1

L_c : longitud de corte; ME: método de estimación; \bar{E} : media del error de estimación en cm²; C: correlación entre datos observados y estimados; RMSE: raíz cuadrada de la media del cuadrado del error de estimación en cm².

** valor estadísticamente distinto a cero.

En la Figura 17 se presentan gráficamente los valores de \bar{E} denotados en la Tabla 14. En la misma se puede apreciar como el sesgo de las estimaciones NLS se incrementa con la distancia entre observaciones (1 m a 3 m), independientemente de la intensidad de la dependencia y del modelo de ahusamiento ((a), (b), (c), y (d) en Figura 17). A su vez, el sesgo de las estimaciones FGNLS resultó consistentemente menor al de las NLS. Por ejemplo, en el escenario con autocorrelación elevada el valor de \bar{E} fue en promedio 0,608 veces menor en FGNLS respecto a NLS. El sesgo de las estimaciones FGNLS se incrementaron en $L_c = 3$ m respecto a L_c de 1 m si la autocorrelación fue baja ($AR_2(\phi_1 = 0,7, \phi_2 = -0,1)$) (ver

Figuras 17a y 17b). En tanto que el resultado opuesto se observa en el escenario de autocorrelación elevada $AR(\phi_1=0,7, \phi_2=0,2)$, ver (c) y (d) en Figura 17, perdiendo significancia estadística (ver Tabla 14).

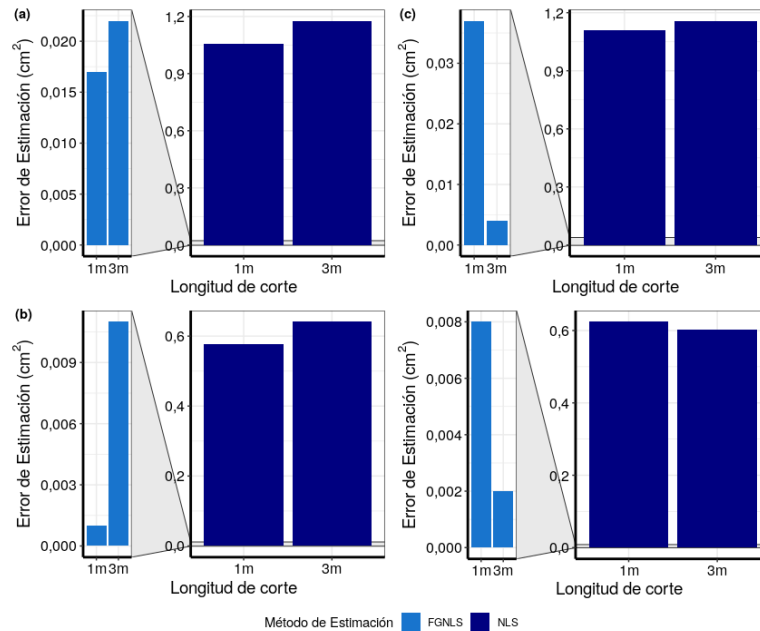


Figura 17. Valor absoluto de la media del error de estimación de los modelos de ahusamiento dinámicos en la validación de los métodos NLS y FGNLS en los escenarios $AR(2)$ con variancia de 40^2cm^4 . Modelo exponencial-exponencial en escenario de autocorrelación $AR(\phi_1 = 0,7 ; \phi_2 = -0,1)$ (a) y $AR(\phi_1 = 0,7 ; \phi_2 = 0,2)$ (c); Modelo exponencial-general $AR(\phi_1 = 0,7 ; \phi_2 = -0,1)$ (b) y $AR(\phi_1 = 0,7 ; \phi_2 = 0,2)$ (d).

Los resultados presentados en la Tabla 15 corresponden a los estadísticos de la validación en los escenarios con $AR(2)$ de variancia elevada (80^2cm^4). Los valores de C y RMSE no varían consistentemente dentro de una misma magnitud de dependencia. Por ejemplo, en el escenario de autocorrelación elevada, $AR(\phi_1 = 0,7, \phi_2 = 0,2)$, con L_c de 1 m el modelo exponencial-exponencial el indicador C en la estimación NLS fue de 0,879 y el de FGNLS resultó en 0,877. Esta sutil diferencia resulta despreciable.

Tabla 15. Resultados de la validación de las estimaciones de ahusamiento en los escenarios con proceso AR(2) de variancia de 80^2 cm^4

Modelo	L_c	ME	Autocorrelación baja			Autocorrelación elevada		
			\bar{E}	C	RMSE	\bar{E}	C	RMSE
Exponencial-exponencial	1m	NLS	1,724**	0,876	76,9	1,872**	0,879	76,051
	1m	FGNLS	-0,015**	0,876	77,0	-0,035**	0,877	76,529
	3m	NLS	2,125**	0,876	76,9	1,158**	0,878	76,459
	3m	FGNLS	0,019**	0,876	76,9	0,004	0,878	76,437
Exponencial-general	1m	NLS	1,058**	0,876	76,7	1,178**	0,879	75,852
	1m	FGNLS	0,001	0,876	76,7	-0,004	0,879	75,844
	3m	NLS	1,234**	0,876	76,7	0,603**	0,879	76,294
	3m	FGNLS	0,010*	0,876	76,7	0,002	0,879	76,295

L_c : longitud de corte; ME: método de estimación; \bar{E} : media del error de estimación en cm^2 ; C: correlación entre datos observados y estimados; RMSE: raíz cuadrada de la media del cuadrado del error de estimación en cm^2 .

** valor estadísticamente distinto a cero.

En la Figura 18 se observan los valores de \bar{E} que se presentan en la Tabla 15. Se aprecia que si la autocorrelación es baja ($AR(\phi_1=0,7, \phi_2=-0,1)$), el sesgo se incrementa en la estructura de medición de 3 m respecto a 1 m de L_c , tanto en la estimación NLS como FGNLS ((a) y (b) de la Figura 18). Exactamente lo contrario ocurre en el escenario de autocorrelación elevada, (c) y (d) de la Figura 18 ($AR(\phi_1=0,7, \phi_2=0,2)$). Las estimaciones FGNLS del modelo exponencial-general resultaron insesgadas, salvo en el escenario de autocorrelación baja, donde el incremento de L_c compromete dicha propiedad, que pasa de $0,001 \text{ cm}^2$ (no significativo) a $0,010 \text{ cm}^2$ (significativo) (ver Tabla 15). Para el caso del modelo exponencial-exponencial, sólo se obtuvo un sesgo no significativo, en autocorrelación elevada en $L_c= 3 \text{ m}$.

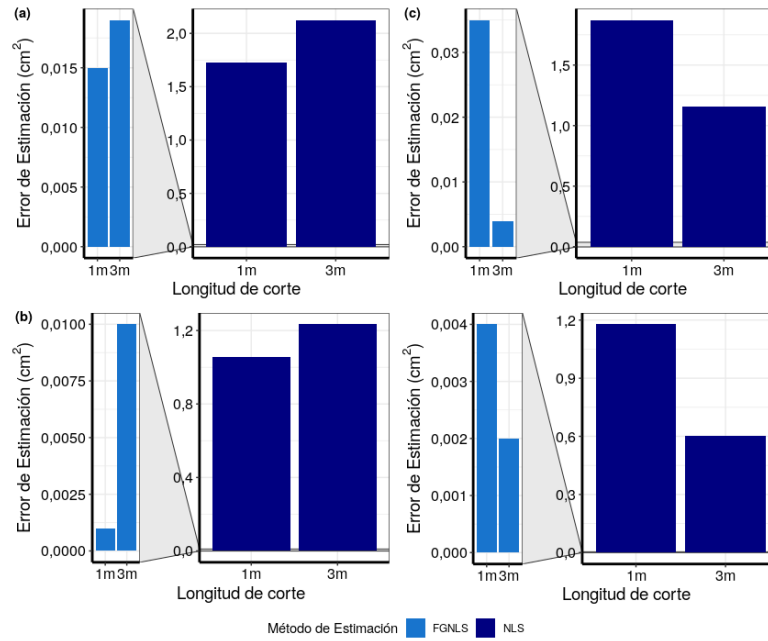


Figura 18. Valor absoluto de la media del error de estimación de los modelos de ahusamiento dinámicos en la validación de los métodos NLS y FGNLS en los escenarios AR(2) con variancia de 80²cm⁴. Modelo exponencial-exponencial en escenario de autocorrelación AR($\phi_1 = 0,7$; $\phi_2 = -0,1$) (a) y AR($\phi_1 = 0,7$; $\phi_2 = 0,2$) (c); Modelo exponencial-general AR($\phi_1 = 0,7$; $\phi_2 = -0,1$) (b) y AR($\phi_1 = 0,7$; $\phi_2 = 0,2$) (d).

El impacto de la modelación explícita de la estructura de dependencia en la estimación de los coeficientes de los modelos de ahusamiento dinámico se evalúa en las siguientes tablas. El proceso de validación, que se presentó previamente, determinó que no son considerables las diferencias entre el modelo exponencial-exponencial y el exponencial-general. Adicionalmente, dichos resultados muestran que la forma que adopta el modelo de García (2015) no condiciona las diferencias observadas entre métodos de estimación. En consecuencia, las diferencias en la estimación de los parámetros se presentan para el caso del modelo exponencial-general, el cual presentó un comportamiento levemente más promisorio.

La Tabla 16 y la Tabla 17 presentan los estimadores FGNLS y NLS de los coeficientes del modelo exponencial-general para el caso del proceso autorregresivo de primer orden con variancia baja y variancia alta, respectivamente. En ellas se detallan los resultados con baja y alta autocorrelación y, además, se discrimina la L_c de 1 m de la de 3 m. En la división de autocorrelación baja de la Tabla 16, se observa que los parámetros estimados con NLS no resultaron estadísticamente diferentes a los obtenidos mediante FGNLS cuando L_c es de 3 m, mientras que en la L_c de 1 m solamente las estimaciones de $\widehat{\beta}_4$ no difirieron de forma significativa. En general, las variancias de los estimadores FGNLS fueron diferentes en

términos estadísticos a la de los estimadores NLS. Independientemente del tipo de estimadores, la varianza de estos es sensiblemente mayor cuando L_c es de 3 m. En la segunda parte de la Tabla 16 se denotan los resultados cuando la autocorrelación es elevada. Bajo este escenario los métodos generaron estimaciones siempre diferentes independientemente de la estructura de medición, mientras que los estimadores FGNLS presentan variancias significativamente mayores para los coeficientes β_1 y β_3 en $L_c = 1$ m y para β_3, β_4 y β_5 en $L_c = 3$ m.

Tabla 16. Estimadores NLS y FGNLS de los coeficientes del modelo exponencial-general con errores autorregresivos de primer orden y variancia de 40^2 cm^4

	Autocorrelación Baja				Autocorrelación Alta			
	L_c de 1m		L_c de 3m		L_c de 1m		L_c de 3m	
	NLS[1]	FGNLS[1]	NLS[2]	FGNLS[2]	NLS[1]	FGNLS[1]	NLS[2]	FGNLS[2]
$\widehat{\beta}_1$	4,115 ^{**B} (0,044 ²) ^a	4,019 ^{**A} (0,066 ²) ^b	4,200 ^{**C} (0,071 ²) ^a	4,200 ^{**C} (0,072 ²) ^a	4,183 ^{**C} (0,045 ²) ^a	3,149 ^{**A} (0,054 ²) ^b	4,261 ^{**D} (0,072 ²) ^a	4,070 ^{**B} (0,075 ²) ^a
$\widehat{\beta}_3$	0,699 ^{**B} (0,007 ²) ^a	0,706 ^{**C} (0,010 ²) ^b	0,678 ^{**A} (0,010 ²) ^a	0,679 ^{**A} (0,004 ²) ^b	0,690 ^{**B} (0,007 ²) ^a	0,751 ^{**D} (0,010 ²) ^b	0,679 ^{**A} (0,010 ²) ^a	0,699 ^{**C} (0,012 ²) ^b
$\widehat{\beta}_4$	0,508 ^{**A} (0,010 ²) ^a	0,509 ^{**A} (0,011 ²) ^a	0,535 ^{**B} (0,015 ²) ^a	0,534 ^{**B} (0,005 ²) ^b	0,546 ^{**B} (0,009 ²) ^a	0,558 ^{**D} (0,007 ²) ^b	0,554 ^{**C} (0,015 ²) ^a	0,533 ^{**A} (0,019 ²) ^b
$\widehat{\beta}_5$	-1,057 ^{**B} (0,045 ²) ^a	-1,070 ^{**A} (0,058 ²) ^b	-0,923 ^{**C} (0,066 ²) ^a	-0,926 ^{**C} (0,070 ²) ^a	-0,918 ^{**C} (0,040 ²) ^a	-0,996 ^{**A} (0,041 ²) ^a	-0,868 ^{**D} (0,062 ²) ^a	-0,962 ^{**B} (0,075 ²) ^b

Letras iguales indican diferencias estadísticas no significativas ($p > 0,05$): mayúsculas para la prueba de igualdad de estimación por combinación de método y L_c , minúsculas para la de homogeneidad de variancia de los estimadores (denotadas en paréntesis) dentro de cada L_c . ** denota estimación estadísticamente diferente a cero.

Al examinar la Tabla 17 se observa que los valores estimados de los coeficientes del componente de decaimiento de $\varphi(x)$ fueron considerablemente diferentes a los presentados en el escenario anterior. Por ejemplo, los estimadores de β_1 fueron cercanos a 4 en los escenarios AR(1) de variancia de 40^2 cm^4 (Tabla 16) y se aproximaron a 1 en los de variancia de 80^2 cm^4 . En el mismo sentido, los de $\eta(h)$ fueron más estables; en las mismas especificaciones expresadas en el ejemplo anterior los estimadores de β_4 se mantienen en valores aproximados a 0,5. Los resultados expresados en la Tabla 17 muestran que en ambos niveles de autocorrelación, las estimaciones de FGNLS con 1 m de L_c resultaron diferentes estadísticamente para los cuatro parámetros, excepto $\widehat{\beta}_3$ cuya estimación NLS no difirió de FGNLS en L_c de 1 m bajo autocorrelación alta. De manera equivalente a lo ocurrido en el caso de variancia baja, los estimadores FGNLS presentaron mayor variancia y la misma se

incrementa cuando crece la distancia entre los puntos de medición sobre el fuste. Obsérvese que la varianza del estimador FGNLS de β_5 es el más afectado: en Lc de 1 m es de $0,202^2$ y en Lc de 3m resulta de $0,256^2$.

Tabla 17. Estimadores NLS y FGNLS de los coeficientes del modelo exponencial-general con errores autorregresivos de primer orden y variancia de 80^2 cm^4 .

	Autocorrelación Baja				Autocorrelación Alta			
	Lc de 1m		Lc de 3m		Lc de 1m		Lc de 3m	
	NLS[1]	FGNLS[1]	NLS[2]	FGNLS[2]	NLS[1]	FGNLS[1]	NLS[2]	FGNLS[2]
$\widehat{\beta}_1$	0,821 ^{**B} (0,071 ²) ^a	0,566 ^{**A} (0,105 ²) ^b	0,898 ^{**D} (0,113 ²) ^a	0,850 ^{**C} (0,122 ²) ^a	1,077 ^{**C} (0,066 ²) ^a	0,124 ^{*A} (0,086 ²) ^b	1,217 ^{**D} (0,105 ²) ^a	0,679 ^{*B} (0,114 ²) ^b
$\widehat{\beta}_3$	1,083 ^{**C} (0,039 ²) ^a	1,115 ^{**D} (0,057 ²) ^b	1,047 ^{**A} (0,059 ²) ^a	1,058 ^{**B} (0,061 ²) ^a	0,980 ^{**B} (0,028 ²) ^a	0,980 ^{**B} (0,032 ²) ^a	0,939 ^{**A} (0,040 ²) ^a	1,001 ^{**C} (0,059 ²) ^b
$\widehat{\beta}_4$	0,469 ^{**A} (0,016 ²) ^a	0,478 ^{**B} (0,020 ²) ^b	0,468 ^{**A} (0,026 ²) ^a	0,466 ^{**A} (0,028 ²) ^b	0,484 ^{**A} (0,016 ²) ^a	0,552 ^{**C} (0,013 ²) ^b	0,494 ^{**B} (0,026 ²) ^a	0,485 ^{**A} (0,035 ²) ^b
$\widehat{\beta}_5$	-1,988 ^{**B} (0,149 ²) ^a	-2,022 ^{**A} (0,202 ²) ^b	-1,904 ^{**C} (0,234 ²) ^a	-1,932 ^{**C} (0,256 ²) ^a	-1,695 ^{**A} (0,122 ²) ^a	-1,398 ^{**C} (0,105 ²) ^b	-1,562 ^{**B} (0,183 ²) ^a	-1,688 ^{**A} (0,247 ²) ^b

Letras iguales indican diferencias estadísticas no significativas ($p > 0,05$): mayúsculas para la prueba de igualdad del estimación por combinación de método y Lc , minúsculas para la de homogeneidad de variancia de los estimadores (denotadas en paréntesis) dentro de cada Lc . ** denota estimación estadísticamente diferente a cero.

En las tablas 18 y 19 se observan los resultados obtenidos en el caso del error con proceso de dependencia AR (2). Los resultados son equivalentes a los presentados en los apartados previos para el proceso AR (1). En la Tabla 18, en el segmento de autocorrelación baja, se observa que únicamente los parámetros de $\varphi(x)$, β_1 y β_3 no son diferentes estadísticamente cuando la Lc es de 3 m, en contraste a la misma situación en AR(1) donde ninguno resultó diferente (Tabla 16). En ambos escenarios, Tabla 18 y Tabla 19, se observa que los parámetros estimados mediante FGNLS en Lc de 1 m fueron estadísticamente diferentes al resto, excepto $\widehat{\beta}_4$, que en el proceso de variancia baja con autocorrelación baja no fue diferente al mismo estimador con Lc de 3 m (Tabla 18). La misma situación ocurrió para $\widehat{\beta}_3$ en el proceso de variancia alta con autocorrelación alta (Tabla 19).

Tabla 18. Estimadores NLS y FGNLS de los coeficientes del modelo exponencial-general con errores autorregresivos de segundo orden y variancia de 40^2 cm^4

	Autocorrelación Baja				Autocorrelación Alta			
	Lc de 1m		Lc de 3m		Lc de 1m		Lc de 3m	
	NLS[1]	FGNLS[1]	NLS[2]	FGNLS[2]	NLS[1]	FGNLS[1]	NLS[2]	FGNLS[2]
$\widehat{\beta}_1$	4,0 ^{**B} (0,044 ²) ^a	3,610 ^{**A} (0,068 ²) ^b	4,145 ^{**C} (0,071 ²) ^a	4,137 ^{**C} (0,081 ²) ^b	4,040 ^{**B} (0,044 ²) ^a	3,248 ^{**A} (0,055 ²) ^b	4,146 ^{**D} (0,070 ²) ^a	4,059 ^{**C} (0,073 ²) ^a
$\widehat{\beta}_3$	0,710 ^{**B} (0,007 ²) ^a	0,734 ^{**C} (0,011 ²) ^b	0,692 ^{**A} (0,011 ²) ^a	0,690 ^{**A} (0,012 ²) ^a	0,712 ^{**B} (0,007 ²) ^a	0,745 ^{**C} (0,010 ²) ^b	0,70 ^{**A} (0,011 ²) ^a	0,710 ^{**B} (0,014 ²) ^b
$\widehat{\beta}_4$	0,517 ^{**A} (0,009 ²) ^a	0,531 ^{**C} (0,010 ²) ^b	0,526 ^{**B} (0,015 ²) ^a	0,530 ^{**C} (0,018 ²) ^b	0,511 ^{**B} (0,009 ²) ^a	0,543 ^{**C} (0,007 ²) ^b	0,511 ^{**B} (0,015 ²) ^a	0,493 ^{**A} (0,019 ²) ^b
$\widehat{\beta}_5$	-1,056 ^{**B} (0,045 ²) ^a	-1,062 ^{**A} (0,054 ²) ^b	-0,987 ^{**C} (0,069 ²) ^a	-0,963 ^{**D} (0,077 ²) ^b	-1,077 ^{**B} (0,045 ²) ^a	-1,031 ^{**D} (0,044 ²) ^a	-1,044 ^{**C} (0,072 ²) ^a	-1,107 ^{**A} (0,086 ²) ^b

Letras iguales indican diferencias estadísticas no significativas ($p > 0,05$): mayúsculas para la prueba de igualdad del estimación por combinación de método y Lc , minúsculas para la de homogeneidad de variancia de los estimadores (denotadas en paréntesis) dentro de cada Lc . ** denota estimación estadísticamente diferente a cero.

Tabla 19. Estimadores NLS y FGNLS de los coeficientes del modelo exponencial-general con errores autorregresivos de segundo orden y variancia de 80^2 cm^4

	Autocorrelación Baja				Autocorrelación Alta			
	Lc de 1m		Lc de 3m		Lc de 1m		Lc de 3m	
	NLS[1]	FGNLS[1]	NLS[2]	FGNLS[2]	NLS[1]	FGNLS[1]	NLS[2]	FGNLS[2]
$\widehat{\beta}_1$	0,871 ^{**B} (0,070 ²) ^a	0,404 ^{**A} (0,107 ²) ^b	1,092 ^{**D} (0,110 ²) ^a	1,0 ^{**C} (0,125 ²) ^b	0,926 ^{**C} (0,070 ²) ^a	0,150 ^{*A} (0,091 ²) ^b	1,074 ^{**D} (0,110 ²) ^a	0,661 ^{**B} (0,115 ²) ^b
$\widehat{\beta}_3$	1,075 ^{**C} (0,039 ²) ^a	1,058 ^{**B} (0,046 ²) ^b	1,037 ^{**A} (0,058 ²) ^a	1,031 ^{**A} (0,065 ²) ^a	1,101 ^{**B} (0,043 ²) ^a	1,109 ^{**C} (0,038 ²) ^b	1,061 ^{**A} (0,063 ²) ^a	1,116 ^{**C} (0,091 ²) ^b
$\widehat{\beta}_4$	0,47 ^{**A} (0,016 ²) ^a	0,516 ^{**C} (0,019 ²) ^b	0,471 ^{**A} (0,026 ²) ^a	0,479 ^{**B} (0,031 ²) ^b	0,456 ^{**B} (0,016 ²) ^a	0,549 ^{**C} (0,014 ²) ^b	0,457 ^{**B} (0,026 ²) ^a	0,443 ^{**A} (0,035 ²) ^b
$\widehat{\beta}_5$	-1,994 ^{**A} (0,15 ²) ^a	-1,749 ^{**D} (0,164 ²) ^a	-1,911 ^{**B} (0,235 ²) ^a	-1,849 ^{**C} (0,262 ²) ^a	-2,100 ^{**A} (0,160 ²) ^a	-1,526 ^{**D} (0,119 ²) ^b	-2,005 ^{**B} (0,249 ²) ^a	-2,135 ^{**C} (0,335 ²) ^b

Letras iguales indican diferencias estadísticas no significativas ($p > 0,05$): mayúsculas para la prueba de igualdad de la estimación por combinación de método y Lc , minúsculas para la de homogeneidad de variancia de los estimadores (denotadas en paréntesis) dentro de cada Lc . ** denota estimación estadísticamente diferente a cero.

Los resultados presentados evidenciaron que el efecto de modelar explícitamente los procesos de dependencia generó impactos significativos en la estimación de parámetros de modelos de ahusamiento dinámico independientemente de la estructura de medición, Lc , del tipo de dependencia autorregresiva y de la intensidad de la autocorrelación entre observaciones.

Capítulo Cinco. *Discusión*

Capítulo Cinco

5. Discusión

El impacto de la modelización explícita de la autocorrelación del error en la estimación del ahusamiento dinámico se evaluó en perfiles de fuste simulados con diferentes modelos de dependencia entre observaciones. Dicha simulación se realizó mediante un modelo predictivo del crecimiento individual de carácter estático e independiente de la distancia, el cual se ajustó previamente a los fines de poder generar estructuras de datos en los que el único factor que aporte variabilidad sea el proceso de dependencia que rige al componente estocástico (error). Es por ello que la naturaleza del presente trabajo de tesis es deductiva-inductiva. En la primera etapa se aplicó el enfoque deductivo para determinar y modelar el crecimiento de individuos de *E. grandis* en plantaciones mono-específicas y coetáneas, realizadas en suelos arenosos de Corrientes (Argentina). Luego, los resultados del proceso deductivo permitieron generar simulaciones a fin de inducir los efectos que fueron el objeto de estudio: la dependencia entre observaciones.

Acerca del MCF de árbol individual, estático e independiente de la distancia

El modelo de crecimiento que se formula en (3.2.1) plantea un sistema cerrado de ecuaciones en el que se especifican las funciones de rendimiento del Dn , la Ht en función de la estimación del Dn y la de ahusamiento diamétrico; de esta forma el sistema es consistente, se encuentra determinado y es estimable. Estas condiciones las plantean Sharma *et al.* (2002) como requerimientos deseables en la formulación de MCF. El sistema se caracteriza por ser parsimonioso, de mínima expresión, su interpretación es sencilla y la aplicación es directa. Estas características se deben a los supuestos en los que se sostiene y al enfoque con el que se aplica la formulación. En el mismo se determina un vector de estado que contiene las principales variables dasométricas que se emplean como covariables en la función de ahusamiento (salida del modelo).

El modelo BOD ajustó adecuadamente la curva de rendimiento del Dn y, por tanto, no se exploraron las reparametrizaciones propuestas por Pinheiro y Bates (2000), lo cual se atribuye a: a) la forma del crecimiento del diámetro observada se clasifica en el Tipo I de acuerdo a Daniels *et al.* (1979) y b) a que la baja fertilidad de los suelos produce que la

asíntota se alcance tempranamente. La estructura de varianza de la distribución de coeficientes aleatorios del modelo BOD, Λ , enuncia que ambos coeficientes se encuentran negativa y altamente correlacionados (-0,86); ello implica que la disminución de la velocidad de crecimiento determina que el valor esperado de la asíntota crece, lo cual resulta consistente con el patrón de crecimiento enunciado.

La relación hipsométrica se modeló mediante la función de Schrueder de potencia aleatoria, lo cual es congruente dada la forma aproximadamente lineal que se observa en su expresión matemática y lo observado en la exploración gráfica de los datos (ver Figura 7). La función ajustada no presentó las características deseadas que enuncian Yuancai y Parresol (2001). Ello se debió a que mediante el análisis gráfico es posible corroborar que carecía de puntos de inflexión y asíntota horizontal (forma sigmoidea). El mismo resultado obtuvieron Crecente-Campo *et al.* (2010) en su función hipsométrica. Estos autores enuncian que las restricciones expresadas no son necesarias dado que no se trata de una relación que contemple tendencias temporales. No obstante, el enfoque aquí utilizado permite captar dicha tendencia al emplear como covariable la predicción del Dn .

Respecto a la función de salida del MCF, el resultado del presente trabajo es consistente con el de Rojo *et al.* (2005), que señala la mejor performance de la segunda variante del modelo de ahusamiento de Kozak (2004) y coincide con Cao y Wang (2011) que concluyen que en todos los casos la inclusión de efectos aleatorios individuales mejoran la performance del modelo. Fassola *et al.* (2007) compararon el ajuste del modelo de Bi (2000) con modelos segmentados y polinómicos en *E. grandis* cultivado en la Mesopotamia argentina y concluyeron que el modelo más promisorio corresponde al primero. En el citado trabajo no se evalúan las funciones propuestas por Kozak (1988, 1997, 2004) y no contempla la posibilidad de incluir estructuras de variabilidad entre y dentro de individuos.

La formulación del MCF se sostiene en supuestos que permiten mantener un compromiso adecuado entre nivel de resolución, parsimonia y objetivo. Fundamentalmente porque en base a dichos supuestos el vector de entradas es nulo y se descarta la presencia de patrones en la variabilidad residual espacial. En consecuencia, no es necesario formular funciones de control y cambio de las condiciones de crecimiento que agreguen grados de complejidad. Lo último es posible dada la homogeneidad del sitio relativamente acotado, a la especificidad del material y la determinación de un único régimen silvícola. Estos

supuestos no pueden sostenerse en MCF que abarcan varios regímenes silviculturales, más de un material y/o sitios de extensión tal que la heterogeneidad espacial precisa modelarse; tal es el caso del trabajo de Scolforo *et al.* (2019a; 2019b) quienes modelan el crecimiento de tres clones de *Eucalyptus* sp. para toda el área de cultivo en Brasil. Es posible que el MCF que se propone en el presente trabajo pueda emplearse en formulaciones que permitan el tránsito entre diferentes condiciones de crecimiento, que surjan o no de modificaciones silviculturales o de base. Una forma interesante podría plantearse mediante la teoría de grafos, tal que el modelo presentado en el actual trabajo constituiría un sendero o un punto. Dependiendo del enfoque, otra alternativa interesante sería incluir esta formulación como una unidad de una red neuronal convolucional.

En los trabajos de modelización del crecimiento forestal suele caerse en el error común de construir indicadores indirectos de calidad de sitio (IS, densidad relativa y/u otros) cuando dicha variabilidad no se observa. Un ejemplo de ello es el trabajo de Caniza *et al.* (2016) en el que se observa como las curvas guías exceden el rango de los valores observados a la edad base, lo cual indica que la diferencia entre sitios es atribuible a la variancia propia de la variable. Otro ejemplo es el trabajo de Mojena *et al.* (2019), en el que se determinan cuatro calidades de sitio mediante información empírica que colectan en una superficie de 15 ha, cuando las superficies de mínima gestión son del orden de 100 ha. Se incurre en dicho error en la modelización forestal al no respetar el principio de parsimonia, además de forzar a que los datos sean verosímiles al modelo y no que el modelo sea verosímil a los datos. La información preliminar, análisis gráfico y el trabajo de Caniza *et al.* (2016), permite sostener la exclusión de expresiones que modelen la variabilidad espacial en el MCF que se construye, lo cual implica ganancias en la parsimonia del modelo y consecuentemente en su inteligibilidad.

Por otra parte, es común generar modelos de crecimiento individuales dependientes de la distancia en los que se contempla implícitamente la estructura de la variabilidad espacial. Este grado de complejidad no es sustentable en modelos soportados por datos provenientes de parcelas de aproximadamente 300 m². Ello se debe a que los supuestos de estacionalidad de primer (lineal), segundo (polimorfismo) y tercer grado (tendencias temporales) no se pueden sostener con este nivel de detalle en el relevamiento (Webster y Oliver 2007). En relación a ello, Crecente-Campo (2008) señala que la inclusión de índices

de competencia dependientes de la distancia en modelos de crecimiento de *Pinus radiata* D. Don implica mejoras leves en la predicción del área basal y empeora en el caso de la altura, respecto de aquellos que son independientes de la distancia. Si bien en este estudio nos concentramos en una situación en la que no se justifica incluir estimadores de la dependencia espacial, la misma podría evaluarse mediante modelos de competencia entre individuos y funciones estructurales, para contemplar cambios en la competencia entre rodales y entre edades.

El crecimiento suele modelarse explícitamente, tal como en Crecente-Campo (2008), o bien se emplean expresiones que determinan el comportamiento futuro de las variables involucradas como funciones del comportamiento pasado de las mismas; un ejemplo de ello son los trabajos de Bolzan Martins *et al.* (2014) y Scolforo *et al.* (2019a, 2019b). En el enfoque de los trabajos citados previamente, la consistencia de los sistemas de ecuaciones no está asegurada ya que la variable respuesta se encuentra a ambos lados de la igualdad, lo cual condiciona las características de los estimadores. El empleo de funciones de transición global, conforme al enfoque de estados de crecimiento discutido por García (1994), constituye una cualidad del modelo propuesto dado que la determinación del comportamiento del sistema, a una edad específica, es directa e independiente del tiempo pasado (inmediato); lo que a su vez es consecuente con el principio de parsimonia. El empleo de funciones de transición global permite alcanzar las condiciones deseadas que plantea García (1994): consistencia del estimador, composición y causalidad. Además, se asegura que la variable respuesta no se encuentre a ambos lados de la igualdad y la expresión explícita de crecimiento se puede obtener por derivación, operación que es más sencilla que la integración.

El nivel de resolución con que se formula y estima el modelo del presente trabajo es poco empleado. Oliveira Castro *et al.* (2013) y Bolzan Martins *et al.* (2014) señalan que esto se debe a la complejidad de los mismos. Bolzan Martins *et al.* (2014) concluyen que emplear este nivel de abstracción permite obtener estimaciones más precisas del crecimiento y del rendimiento. Cao (2006) enuncia al sesgo del error como un problema significativo de este tipo de modelo, que se acumula al integrar los resultados a nivel de masa o rodal. Dicho enunciado es un problema en el planteo del modelo y de la sostenibilidad de los supuestos en los que se sustenta la estimación, más aún si no se consideran los procesos de dependencia y la heterocedasticidad del error. En su formulación, Cao (2006) enuncia los valores futuros

como regresiones en valores pasados y emplea restricciones que permiten converger las integraciones al nivel de rodal; modela así, implícitamente, los cambios temporales en las funciones de distribución de probabilidades de las variables. En el presente trabajo la resolución de árbol individual del MCF se logra mediante la expresión de estructuras de varianzas entre y dentro de individuos, lo cual permite mejoras considerables en la capacidad predictiva (C) y en la verosimilitud de las funciones (AIC y BIC) que conforman el modelo, sin comprometer la parsimonia del mismo. Los autores Castedo Dorado *et al.* (2006), Adame *et al.* (2008) y Crecente-Campo *et al.* (2010) reportan resultados similares. Adame *et al.* (2008) señalan que la mejor capacidad predictiva (incremento aproximado de 44 %) se debe a que los efectos aleatorios explican la variabilidad debida a la omisión de tratamientos silviculturales y variables desconocidas que no se incluyen en el modelo. Crecente-Campo *et al.* (2010) consideran que la mejora en los atributos del modelo al incluir coeficientes aleatorios se debe a que se modela implícitamente la falta de independencia entre observaciones. En el presente trabajo, la naturaleza aleatoria de los coeficientes se plantea en la formulación misma del modelo (3.2.1) a fin de estimar explícitamente la variabilidad intrínseca al árbol, la cual puede ser entendida como genética o causada por variaciones de micro sitio, y no se asigna a posibles efectos enmascarados de tratamientos silvícolas u otros, dada la naturaleza de modelo estático e independiente de la distancia.

En suma, la formulación que se empleó combina el enfoque de estados de crecimiento con el de modelos no lineales mixtos (MNLMM), lo cual permite: obtener estimaciones directas, expresar y modelar la variabilidad individual de forma explícita, no forzar la linealidad de variables que no lo son y evitar transformaciones que afectan las distribuciones empíricas de las variables y sus estimadores. Ello, junto a las características de parsimonia, interpretabilidad y aplicación directa, constituyen cualidades deseadas del MCF que se presenta y se contrapone a formulaciones más complejas, tales como la de Scolforo *et al.* (2019a), en la que se ajustan funciones de predicción y de proyección del diámetro a nivel de árbol-individual mediante estadísticos de orden (percentiles), proyectando valores futuros en función a los estimados en tiempos pasados, con la variable transformada mediante logaritmicación y restringiendo por compatibilidad con los resultados a nivel de rodal, enfoque similar al de Cao (2006).

Peng (2000) plantea que la mayor fortaleza de un modelo de naturaleza empírica

como el que se formuló y estima en el presente trabajo, reside en describir de forma consistente la relación entre las variables mediante funciones matemáticas adecuadas. A lo cual se le debe agregar que el enfoque de formulación-estimación que se empleó permite obtener distribuciones posteriores de los coeficientes que describen dichas relaciones funcionales. Estas distribuciones son potencialmente útiles en el planteo de pruebas de hipótesis, tal como el efecto de prácticas silvícolas en los parámetros distribucionales de los coeficientes aleatorios que determinan el comportamiento de las variables del MCF. Un ejemplo común es el efecto de intensidades de raleo sobre la distribución de θ_i^D , cuya hipótesis puede realizarse sobre el vector de medias, α , y/o sobre la varianza del mismo, Λ .

Del simulador y el muestreo

El enfoque empleado, Figura 4 en Capítulo Tres, en la simulación es consistente con el planteado por Gelman y Hill (2007), a excepción de que no contempla la incertidumbre de los estimadores de los parámetros y coeficientes del MCF de árbol individual. Ello se realizó así para no incrementar la complejidad de la simulación a niveles innecesarios a los efectos del estudio. El tamaño de la población simulada, de 5,6 millones de árboles (vectores de coeficientes), resulta consistente con los datos del Inventario Forestal de la provincia de Corrientes (2018), de acuerdo al cual la superficie forestada con *E. grandis* en la región de estudio asciende 40.000 ha y es factible que un cuarto de ella sea gestionada conforme a los supuestos con los que se propone el MCF (unas 10.080 ± 1680 ha).

Kozak (1997) emplea el enfoque de simulación más usual, correspondiente al muestreo de Monte Carlo, aunque el autor no especifica cuál es el algoritmo que implementa. Bajo esta técnica bayesiana se asume conocida la función que modela la variable de interés, además de verdadero y completamente caracterizado el espacio paramétrico del vector de coeficientes (o parámetros) de dicha función (Gelman *et al.* 2004); consecuentemente, es poco probable que no se sostengan las hipótesis bajo los modelos verdaderos (que se simulan). En general, en situaciones reales se desconoce la forma del modelo y menos aún el espacio paramétrico de los coeficientes (por ello los múltiples supuestos en los que se sostienen las estimaciones). El enfoque de simulación que se empleó en este trabajo genera escenarios comunes a dichas situaciones y únicamente se caracteriza completamente el componente estocástico, el error (**e**).

La proporción de individuos muestreados resulta relativamente pequeña si se contempla que como norma general, en estudios forestales, se enuncia como necesario una presión de muestreo de 1% (Thren y Zerda 1994; Robinson y Hamann 2010). Hanberry *et al.* (2011) determinaron que se necesitan 4 mil árboles para estimar con un 10% la densidad cuando ésta sigue una distribución aleatoria regular *Poisson* (λ). García (1998) obtiene como tamaño muestral necesario 4 árboles/ha para estimar adecuadamente la altura dominante. Kozak (1997) realiza tres simulaciones con mil árboles cada una para evaluar la multicolinealidad en el desarrollo de modelos de ahusamiento. Como es lógico, los trabajos citados muestran la dependencia del tamaño muestral con la naturaleza de la variable, específicamente su varianza. El tamaño de muestra determinado mediante la curva del error resultó satisfactorio en términos de sus resultados, ya que permitió obtener un error del 0,4% en el coeficiente de asíntota de la curva de rendimiento del Dn . Paralelamente, mediante la inferencia gráfica realizada por medio de la Figura 11 y la Figura 12, se observó una ajustada correspondencia entre las distribuciones poblacionales y las observadas en la muestra. Este resultado es consistente con el enunciado de Minasny y McBratney (2006) quienes afirman que la técnica de muestreo es adecuada si reproduce razonablemente la distribución, en este caso, poblacional y multivariada.

Del contraste de los estimadores Mínimos Cuadrados No Lineales Generalizados Factibles versus Mínimos Cuadrados No Lineales

Las dos variantes de la función de ahusamiento dinámico de García (2015), modelo exponencial-exponencial vs. modelo exponencial-general, fueron equivalentes en términos de eficiencia, C . Se observaron cambios desestimables a partir del tercer decimal y cuyo patrón común es un leve incremento en el modelo exponencial-general; por ejemplo, 0,873 vs. 0,874 en el proceso $AR(\phi_1 = 0,5)$ de variancia elevada. El estimador de variancia, RMSE, denotó que la misma se sobreestima en los escenarios de variancia baja (40^2 cm^4) y se subestima cuando la misma es elevada (80^2 cm^4). Al comparar las opciones evaluadas de la función de ahusamiento dinámica, las estimaciones de la variancia entre ellos no acusan comportamientos numéricamente diferentes, a pesar de leves cambios a partir del primer decimal. En dicho nivel el modelo exponencial-general sobrestima menos y subestima levemente más. Este es un resultado aproximado al expuesto en Kozak (1997), donde el autor

observa leves subestimaciones de la variancia de dos variantes de su modelo (Kozak 1988) al analizar la predicción en tres procesos simulados. Numéricamente, el sesgo, evaluado mediante la media del error de la estimación, presenta magnitudes menores en las estimaciones del modelo exponencial-general respecto al exponencial-exponencial. Estas diferencias son sutiles en los escenarios con proceso de dependencia de primer orden y llegan a ser de la mitad en los de segundo orden, a la vez que la combinación de elevada autocorrelación y variancia incrementa notablemente estas diferencias. El comportamiento de los indicadores estudiados, C, E y RMSE, se observó de forma independiente (sin interacción) al proceso y la intensidad de la dependencia, al nivel de variabilidad y de la estructura de los datos (L_c 1m vs 3m).

La discusión precedente, casi un orientador de los resultados vertidos en las Tablas 12 a 15, permite determinar que las estimaciones del componente estocástico se afectaron levemente por la forma de la función de ahusamiento dinámico, principalmente en el sesgo de las estimaciones, tal que el modelo exponencial-general denotó mejor performance. No obstante, el modelo propuesto por García (2015) es estable, dado que los cambios no son bruscos en los resultados entre escenarios para ambas formas evaluadas. Dicha característica es deseable frente al modelo de exponente variable de Kozak (1988) sobre el cual se generan resultados muy disimiles entre las seis variantes evaluadas por el propio autor (Kozak 1997, 2004; Kozak *et al.* 1969) y las tres variantes estudiadas en Garber y Maguire (2003), entre otras.

De acuerdo a García (2015) los pares de datos correlacionados en datos longitudinales se presentan en una proporción menor al 1% y es por ello que, de acuerdo al autor, la modelización de dicha correlación no es importante. Dicha afirmación solo se sustenta cuando se emplean pocos datos por perfil o por árbol. De esta forma, la expresión de pares de datos autocorrelacionados correspondiente a $(m-1)/(m.n-1)$ (García 2015), m mediciones en n árboles, se aproximará a $1/n$ solo con pocas observaciones por árbol. Por ello, García (2015) utiliza observaciones cada 5 m y de ello se deduce que emplea entre 1 a 5 observaciones por perfil. Una lógica similar se encuentra en el trabajo de Kozak (1997), quien evalúa el efecto de la multicolinealidad y la autocorrelación en estimaciones OLS en dos reformulaciones de su propio modelo inicial (Kozak 1988), transformación logarítmica

mediante. Este último autor emplea una observación por árbol para eliminar la autocorrelación (200 datos) no compara entre métodos, realiza evaluaciones en puntos específicos (0,3 m y 10 % de Ht) y no tiene en cuenta los efectos de la transformación que emplea en la distribución de los residuales. El trabajo de Kozak (1997) no es concluyente acerca del efecto de la autocorrelación en las estimaciones de ahusamiento puesto que no puede comparar un escenario de 200 estimaciones respecto a una de mil o más (lo enuncia el mismo Kozak).

Emplear datos más espaciados determina que la correlación entre ellos sea de menor magnitud ya que la misma decae monotónicamente y de forma exponencial. El empleo de un único dato por perfil es ineficiente en términos prácticos, ya que indefectiblemente el método de muestreo es destructivo y el costo de obtener la información es elevado (Kozak 1997). Por otra parte, distancias de 5 m entre mediciones no asegura obtener información de calidad, dado que en individuos de baja Ht (por edad o tamaño) se obtendrían muy pocos datos, a lo sumo tres, y en consecuencia la descripción de la forma del fuste no resulta adecuada.

En el presente estudio se determinó que la estrategia de incrementar la distancia del *lag* no afecta la eficiencia del modelo ni la estimación de la variancia del proceso estocástico, independientemente de la expresión de la función de ahusamiento (modelo exponencial-exponencial o exponencial-general), del estimador (FGNLS o NLS) y de las características del modelo de dependencia (grado, intensidad y variancia). No obstante, afecta en diferentes magnitudes al sesgo de ambos estimadores en función del grado del proceso autorregresivo y de la combinación de intensidad y variancia. Las estimaciones NLS muestran sesgos estadísticamente significativos que se incrementan con Lc de 3 m; esta tendencia fue estable en AR(1). En los únicos escenarios en los que el incremento de Lc denotó una disminución de la media del error de la estimación NLS correspondió al AR (2) con baja variancia y autocorrelación elevada en el modelo exponencial general y con variancia y autocorrelación elevadas en ambos modelos.

Para las estimaciones FGNLS es necesario un análisis cuidadoso del efecto de incrementar la distancia entre retardos, ya que los resultados varían de acuerdo al grado del proceso y la intensidad de la autocorrelación. En los escenarios de dependencia de primer orden con autocorrelación baja el sesgo no es significativo y el incremento de la Lc es

contraproducente en ambos modelos. En tanto que en los escenarios de autocorrelación elevada el sesgo disminuye al incrementarse la distancia entre observaciones, de forma leve a significativa. En el proceso de segundo orden y correlación baja el incremento en la distancia entre observaciones implica incrementos significativos en el sesgo, y el resultado opuesto se observa en los escenarios de elevada autocorrelación.

De acuerdo a los párrafos precedentes es factible enunciar que: a) no es adecuado o suficiente el enfoque que postula al incremento de la distancia entre *lags* (retardos) a fin de eliminar el efecto de la autocorrelación en la estimación NLS; b) las estimaciones FGNLS generalmente, 17 de 32, resultan insesgadas y pueden empeorar o mejorar sus cualidades al emplearse observaciones más espaciadas, en función del proceso que rijan al modelo de dependencia y la intensidad de esta última.

La variancia de los estimadores de los coeficientes resultó baja en general, fue numéricamente más elevada la de $\hat{\beta}_{FGNLS}$ y diferente estadísticamente en la mayoría de los casos estudiados. Al incrementarse la distancia entre observaciones, en general, su valor aumenta (L_c de 1 m vs. L_c de 3 m), lo cual indica que la misma es sensible al número de observaciones. De forma independiente a la forma del estimador, del proceso de dependencia del error y de la estructura de medición/observación, la variancia de los estimadores se incrementa en forma proporcional al incremento de la variabilidad. Estos dos enunciados no son más que una consecuencia de la forma de la distribución del estimador del parámetro que se encuentra afectado a la variancia total y a la raíz cuadrada del número de observaciones (ver Ecuaciones (3.4.3) y (3.4.4)).

De manera general, los estimadores $\hat{\beta}_{FGNLS}$ resultan estadísticamente diferentes a los $\hat{\beta}_{NLS}$. Esta significancia se pierde, en determinadas circunstancias, con el aumento en la distancia entre observaciones ($L_c = 3m$), fundamentalmente en las combinaciones de variancia y autocorrelación baja. Ello explica el sesgo significativo de las estimaciones FGNLS en la validación de los modelos que se estiman con dicha estructura de datos. A su vez, ambos estimadores son sensibles al incremento de la variabilidad. Los valores de los estimadores son completamente disimiles entre los escenarios de variancia baja y alta. Ello

sucede en los coeficientes de ambos componentes de decaimiento y podría entenderse o explicarse como una compensación de ambos, $\eta(\cdot)$ y $\varphi(\cdot)$.

En los apartados precedentes se discute cómo los estimadores evaluados y sus estimaciones/predicciones se vieron afectados en los escenarios simulados, que combinan procesos de dependencia del error, magnitud de dicha dependencia y variancia, además de estructuras de medición. Holísticamente, mediante los resultados se determina que el estimador FGNLS genera estimaciones insesgadas y distribuciones de los estimadores convenientes a fin de plantear hipótesis sobre los mismos.

La existencia de la dependencia en el error en datos longitudinales está ampliamente estudiada y existen diferentes enfoques que permiten modelarla convenientemente en modelos lineales (Nunez-Anton y Woodworth 1994; Pourahmadi 1999, 2000). Las magnitudes temporales y de tamaño (o espacio) de las unidades de observación de estudios forestales determina la necesidad de realizar múltiples mediciones, y a su vez estos modelos no son lineales en sus coeficientes/parámetros. En este contexto, como se enunció, no abundan estudios que determinen el comportamiento de estimadores que incorporen estructuras de autocorrelación. La mayoría de los trabajos de la modelización del ahusamiento de fuste, en los que se aborda la dependencia del error, se enfocan en la reparametrización y selección de modelos (Tasissa y Burkhart 1998; Garber y Maguire 2003; Arias-Rodil *et al.* 2015), en muchos casos mediante aproximaciones lineales (Kozak 1997; Cao y Wang 2011) o no paramétricas (Gregoire y Schabenberger 1996). En consecuencia, los resultados del presente trabajo son relativamente poco comparables, más aún por la naturaleza dinámica de la función de ahusamiento. Los trabajos citados dejan sin lugar a discusión la presencia de procesos de dependencia en datos de naturaleza longitudinal, el cual de manera generalizada responde a un proceso autorregresivo de primer orden (continuo o discreto). En el enfoque de este trabajo se puntualizó en discutir o determinar si es significativo el efecto de estimar explícitamente estructuras de autocorrelación en modelos no lineales de ahusamiento dinámico.

En el trabajo de Meng *et al.* (2012) el RMSE del modelo de crecimiento en área basal disminuye al incorporar la estimación de correlación serial, pero el sesgo de la validación se incrementa. Los autores consideran que es esperable que estos indicadores tengan mejores

comportamientos en los modelos estimados que asumen independencia en la distribución de los residuales. En los presentes resultados se determinó que el efecto de la modelización explícita de la autocorrelación se vio claramente afectado por la distancia entre observaciones y, en consecuencia, al número de mediciones en la unidad de observación, y a la variabilidad del proceso estocástico. Por ello es posible que los resultados de Meng *et al.* (2012) se vean afectados por el bajo número de mediciones por parcelas, de 2 a 5, por la distancia temporal entre ellas, 25 años, y por la elevada variabilidad (de 30 a 12.525 árboles ha⁻¹).

Los trabajos de Garber y Maguire (2003), Trincado y Burkhart (2006) y Cao y Wang (2011) son de referencia en diversos trabajos que se centran en la modelización y selección de curvas de perfil de fuste (de-Miguel *et al.* 2012; Lansanova *et al.* 2019; Özçelik *et al.* 2019). En los citados trabajos se incorporan estructuras de autocorrelación en el marco de los MNLM y se centran en la selección de modelos de ahusamiento estático, no en la comparación de métodos de estimación como en el presente. El trabajo de Garber y Maguire (2003) se focaliza en la reparametrización de la función de ahusamiento de exponente variable (Kozak 1988) para tres especies con bajo número de muestras. En el citado trabajo se observa que, además de un tamaño muestral bajo, se presenta variabilidad adicional a causa de cinco densidades iniciales y, como consecuencia, el sesgo de las estimaciones es significativo. En tanto, Cao y Wang (2011) al formular el modelo establecen como supuesto que el error tiene distribución multivariada con matriz de variancias y covariancias \mathbf{R} sin especificar qué forma tiene la matriz. En tal sentido, en el presente trabajo se denota la importancia de determinar el tipo y la magnitud de la dependencia. Los trabajos de Cao y Wang (2011) y Trincado y Burkhart (2006) se centran en reparametrizar la función polinómica segmentada de Max y Burkhart (1976). Para ello, a la función le adicionan restricciones de pasar por puntos intermedios entre H_t y la altura normal ($h=1,3$ m), según el enfoque de Flewelling (1993). Dadas estas reparametrizaciones el modelo resulta heteroscedástico y, en consecuencia, Trincado y Burkhart (2006) emplean una estructura autorregresiva de variancia exponencial de la altura relativa. La inducción a la heterocedasticidad en el modelo segmentado de Max y Burkhart (1976) ya se aborda en Michael y Reich (1997), quienes emplean la verosimilitud de un modelo lineal mixto en un modelo no lineal con funciones de varianza de elevada complejidad y se observa que la función de autocorrelación es leptocúrtica.

En suma, los enfoques mencionados previamente conllevan una sobre o subespecificación de los modelos del proceso estocástico, lo cual no permite concluir de forma consistente acerca del impacto en las estimaciones de la dependencia entre observaciones en el ajuste de funciones de ahusamiento, menos aún si esta es dinámica. Por otra parte, la afirmación de García (2015) acerca del bajo o nulo impacto de modelar estructuras de autocorrelación parece sostenerse en el estudio de Kozak (1997). No obstante este autor empleó estimadores OLS del modelo logaritmizado y no evaluó el efecto de dicha transformación, dado que postula que el impacto no es significativo. No obstante, Czaplewski y Bruce (1991) demuestran que esta transformación introduce sesgos significativos que se incrementan con el tamaño del árbol y permanecen aún en la re-transformación de la variable estimada.

En el presente trabajo se estableció que la adecuada especificación de estructuras de autocorrelación es significativa y que el empleo de observaciones más espaciadas debe ser evaluada cuidadosamente en procesos AR(2) y nunca es conveniente en AR(1). Por otro lado, se concluye que el empleo de la aproximación de la verosimilitud propuesta por Lindstrom y Bates (Lindstrom y Bates 1990; Pinheiro y Bates 1995, 2000), que genera los estimadores FGNLS, es adecuada y eficiente. Gregoire y Schabenberger (1996) proponen estimadores de ecuaciones generalizadas (GEE) en el contexto de datos longitudinales de funciones de ahusamiento del volumen de árboles. Dicho método se basa en una expansión sobre el vector de coeficientes sin asumir distribuciones del mismo y, en consecuencia, es semiparamétrico y, según los resultados expuestos por los mismos autores, resulta inestable. Una ventaja de la estimación FGNLS es que no se necesitan transformaciones de la variable, como en OLS o GLS, no se basa en expansiones complejas de las derivadas, tal como en la aproximación de la verosimilitud de Laplace (Seber y Wild 2003), y brinda estimaciones de las distribuciones empíricas de los estimadores que permiten plantear pruebas de hipótesis (Lindstrom y Bates 1990; Pinheiro y Bates 1995, 2000; Seber y Wild 2003).

Capítulo Seis. *Conclusiones*

Capítulo Seis

6. Conclusiones

En los siguientes enunciados se formulan las principales conclusiones a las que se arribó mediante el desarrollo de este estudio, a la vez se enuncian recomendaciones y posibles líneas futuras de investigación. Se debe destacar que los objetivos planteados en el capítulo introductorio fueron desarrollados y completados adecuadamente, tal que:

a) Se estimó un MCF de árbol individual ajustando datos de crecimiento de *E. grandis* mediante la conjunción del enfoque de estados de crecimiento con el de modelos no lineales mixtos. Las distribuciones estimadas de los coeficientes aleatorios del MCF, en conjunto con especificaciones de diferentes procesos de dependencia de error (escenarios), se implementaron en un simulador mediante el cual se logró 1) *simular perfiles de fuste temporales de Eucalyptus grandis mediante un modelo de crecimiento individual estático independiente de la distancia, adicionando diferentes estructuras de correlación.*

b) Con los datos de ahusamiento simulados en cada escenario, se estimaron los coeficientes de dos variantes (MEG y MEE) de la función de ahusamiento dinámico de la sección transversal. Esta estimación se realizó por el método de mínimos cuadrados no lineales, bajo el supuesto de independencia, y por máxima verosimilitud aproximada por el algoritmo de LB que incorpora la estructura de autocorrelación. En consecuencia, se llegó a 2) *obtener estimadores de los coeficientes de la función de ahusamiento dinámico, para los datos de cubicaciones simuladas con diferentes estructuras de (co)varianza, mediante dos métodos divergentes.*

c) Finalmente, se contrastaron los resultados obtenidos en la estimación del ahusamiento dinámico mediante estadísticos de la eficiencia (C), variancia (RMSE) y sesgo (\bar{E}) de las estimaciones. Paralelamente, para la variante del modelo MEG se compararon estadísticamente los estimadores de cada coeficiente mediante su distribución esperada. El conjunto de este análisis permitió alcanzar el objetivo de: 3) *comparar los métodos de estimación y determinar el impacto de la autocorrelación en la precisión, sesgo y variancia en las estimaciones en los distintos escenarios simulados.*

Problemas abordados

El presente trabajo se distingue por aplicar conjuntamente el enfoque deductivo e inductivo, de forma que fue posible generar, información empírica mediante, un MCF de árbol individual a fin de simular perfiles de ahusamiento dinámico en los que se inducen estructuras de autocorrelación, para evaluar su impacto al ajustar funciones de ahusamiento dinámico. La simulación de perfiles temporales de *E. grandis* con diferentes procesos de dependencia del error permitió abordar el problema de la autocorrelación del error en la estimación de funciones de ahusamiento dinámico del fuste y específicamente estudiar el impacto de la autocorrelación bajo el supuesto de independencia en contraste con la modelización explícita de la misma en la estimación de modelos no lineales.

Contribuciones

Esta tesis contribuye al conocimiento científico en dos temáticas, una de las cuales es la modelización y simulación del crecimiento de plantaciones forestales, y otra corresponde a la estimación de componentes de dicho sistema:

- En cuanto a la primera, se generó un modelo de crecimiento estático e independiente de la distancia para plantaciones de *E. grandis* en la región de estudio. En el mismo se evidencia que el empleo del enfoque de estados de crecimiento, en conjunto con el de modelos no lineales mixtos, permite generar abstracciones empíricas sencillas, consistentes, temporalmente transitivas, causales y de elevada capacidad predictiva. A su vez, se demuestra que especificar y estimar las distribuciones posteriores de los coeficientes que modelan explícitamente la variabilidad individual incrementa la capacidad predictiva del modelo. Dichas características aseguran la factibilidad de describir procesos a menor detalle, tal como la integración a nivel de rodal, y generar simuladores para llevar a cabo estudios sobre diferentes procesos.
- Respecto a la segunda, en la estimación de funciones de ahusamiento dinámico, con diferentes estructuras de autocorrelación, se determina la factibilidad de implementar la aproximación de Lindstrom-Bates que brinda los estimadores FGNLS, los cuales generan estimaciones insesgadas y al compararlos con los estimadores NLS resultan estadísticamente diferentes a éstos. Además, se concluye que la estrategia de incrementar la

magnitud del *lag* entre observaciones no es suficiente para sostener los supuestos de la estimación NLS.

Recomendaciones

Los resultados obtenidos determinan la necesidad de obtener estimadores que modelen explícitamente los procesos de dependencia de las observaciones del ahusamiento dinámico del fuste. En tal sentido, estimar estructuras de autocorrelación en funciones de ahusamiento dinámico mediante el estimador FGNLS es factible, además de conveniente, a fin relajar los supuestos de independencia de los errores y de linealidad. El mismo se sustenta en una base teórica sólida, con supuestos sostenibles, y permite plantear pruebas de hipótesis, fundamentalmente a nivel poblacional.

Posibles investigaciones futuras

Es factible plantear investigaciones posteriores en las que se comparen los métodos de la aproximación de Laplace con el de Lindstrom-Bates o estimadores bayesianos, agregando grados de complejidad, tal como considerar el espacio continuo en la autocorrelación, o bien, de ser posible, la dependencia espacio-temporal.

Finalmente, dado que estos resultados se acotan a un escenario de crecimiento estático, es necesario evaluar situaciones en las cuales no es factible de sostener el supuesto de estabilidad de crecimiento de la masa. En función del enfoque, se pueden plantear hipótesis de trabajo sobre los parámetros de distribución de los coeficientes del MCF, conjuntamente con el estudio del impacto de estos cambios y de nuevas fuentes variabilidad, condiciones de crecimiento, en la estimación de funciones de ahusamiento dinámico. Desde el campo de la biometría, es posible que el grado de innovación se consiga abordando esta problemática desde la conjunción del enfoque de estados de crecimiento con la teoría de grafos. Mientras la primera determina los estados puntuales y el tránsito entre éstos para condiciones de crecimiento puntuales, la segunda permitiría modelar el tránsito entre condiciones de crecimiento.

Referencias

- Adame, P., Hynynen, J., Cañellas, I. y del Río, M. 2008. Individual-tree diameter growth model for rebollo oak (*Quercus pyrenaica* Willd.) coppices. *Forest Ecology and Management*. 255(3-4): 1011-1022. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2007.10.019>
- Álvarez-González, J. G., Ruiz González, A. A. y Barrio Anta, M. 2004. Modelos paramétricos de la matriz de varianzas-covarianzas en el ajuste de funciones de perfil. *Cuadernos de la Sociedad Española de Ciencias Forestales*. 302: 297-302.
- Arias-Rodil, M., Diéguez-Aranda, U., Rodríguez Puerta, F., López-Sánchez, C. A., Canga Libano, E., Cámara Obregón, A. y Castedo-Dorado, F. 2015. Modelling and localizing a stem taper function for *Pinus radiata* in Spain . *Canadian Journal of Forest Research*. 45(6): 647-658. <https://doi.org/10.1139/cjfr-2014-0276>
- Assmann, E. 1970. *The principles of forest yield studies: studies in the organic production, structure, increment and yield of forest stands*. Primera edición en inglés. P. W. Davis, Ed. Pergamon Press, Oxford.
- Bates, D. M. y Watts, D. G. 1988. *Nonlinear regression analysis and its applications*. John Wiley & Sons, New York, US.
- Bertalanffy, L. V. 1951. Theoretische Biologie II. Band, Stoffwechsel, Wachstum. London: A. Francke AG, Verlag.
- Bi, H. 1999. Predicting stem volume to any height for native tree species in southern New South Wales and Victoria. *New Zealand Journal of Forestry Science*. 29(2): 318-331.
- Bi, H. 2000. Trigonometric variable-form taper equations for Australian eucalypts. *Forest Science*. 43(3): 397-409.
- Bi, H. y Long, Y. 2001. Flexible taper equation for site-specific management of *Pinus radiata* in New South Wales, Australia. *Forest Ecology and Management*. 148(1-3): 79-91. [https://doi.org/10.1016/S0378-1127\(00\)00526-0](https://doi.org/10.1016/S0378-1127(00)00526-0).
- Bolzan Martins, F., Boechat Soares, C. P. y Fernandes da Silva, G. 2014. Individual tree growth models for eucalyptus in northern Brazil. *Scientia Agricola*. 71(3): 212-225. <https://doi.org/10.1590/S0103-90162014000300006>.
- Botkin, D. B., Janak, J. F. y Wallis, J. R. 1972. Some Ecological Consequences of a Computer Model of Forest Growth. *The Journal of Ecology*. 60(3): 849-872. <https://doi.org/10.2307/2258570>.
- Box, G. E. P. y Jenkins, G. M. 1976. *Time series analysis: Forecasting and control*. Holden-Day, Oakland.
- Broz, D. R. (2015). *Diseño y desarrollo de un sistema holístico a través de técnicas de simulación y optimización integradas aplicado a la planificación táctica de operaciones forestales*. Tesis Doctoral. Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca (Buenos Aires, Argentina).
- Caniza, F. J., Torres, C. G. y Aparicio, J. L. 2016. Desarrollo de funciones de índice de sitio para *Eucalyptus grandis* en las planicies arenosas de Corrientes, Argentina. *Jornadas Técnicas Forestales y Ambientales*. 17. 2016 08 17-19, 17, 18 y 19 de Agosto de 2016. Posadas. Argentina.
- Cao, Q. V. 2006. Predictions of individual-tree and whole-stand attributes for loblolly pine plantations. *Forest Ecology and Management*. 236(2-3): 342-347. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2006.09.019>.

- Cao, Q. V y Wang, J. 2011. Calibrating fixed- and mixed-effects taper equations. *Forest Ecology and Management*. 262(4): 671-673. DOI : 10.1016/j.foreco.2011.04.039.
- Capurro, R., Escobar, E. H. y Carnevali, R. 1985. Regiones naturales de Corrientes. EEA INTA Corrientes, Recursos Naturales.
- Castedo Dorado, F., Diéguez-Aranda, U., Barrio Anta, M., Sánchez Rodríguez, M. y von Gadow, K. 2006. A generalized height-diameter model including random components for radiata pine plantations in northwestern Spain. *Forest Ecology and Management*. 229(1-3): 202-213. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2006.04.028>.
- Clutter, J. L. y Bennett, F. A. 1965. *Diameter distributions in old-field slash pine plantations*. Georgia Forest Research Council. Rep 13, 9pp.
- Crecente-Campo, F. 2008. *Modelo de crecimiento de árbol individual para Pinus radiata D. Don en Galicia*. Universidad de Santiago de Compostela. Tesis Doctoral. Universidad Santiago de Compostela.
- Crecente-Campo, F., Dieguez-Aranda, U. y Rodriguez-Soalleiro, R. 2012. Resource communication. Individual-tree growth model for radiata pine plantations in northwestern Spain. *Forest Systems*. 21(3): 538-542. <https://doi.org/10.5424/fs/2012213-03109>.
- Crecente-Campo, F., Tomé, M., Soares, P. y Diéguez-Aranda, U. 2010. A generalized nonlinear mixed-effects height-diameter model for *Eucalyptus globulus* L. in northwestern Spain. *Forest Ecology and Management*. 259(5): 943-952. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2009.11.036>.
- Czaplewski, R. L. y Bruce, D. 1991. Retransformation bias in a stem profile model. *Canadian Journal of Forest Research*. 21(3): 421-421. <https://doi.org/10.1139/x91-055>.
- Daniels, P. W., Helms, U. E. y Baker, F. S. 1979. *Principles of Silviculture* (2a ed.). McGRAW-HILL BOOK, New York (USA).
- de-Miguel, S., Mehtätalo, L., Shater, Z., Kraid, B. y Pukkala, T. 2012. Evaluating marginal and conditional predictions of taper models in the absence of calibration data. *Canadian Journal of Forest Research*. 42(7): 1383-1394. <https://doi.org/10.1139/X2012-090>.
- Demidenko, E. 2013. *Mixed models: theory and applications with R*. John Wiley & Sons, New Jersey, USA.
- Ek, A. R. y Dudek, A. 1980. Developmen of individual tree based stand growth simulators: progress and applications. Department of Foret Resources, University of Minnesota, Staff Paper 20, 25 pp.
- Escobar, E. H., Ligier, H. D., Melgar, R., Mattelo, H. y Vallejos, O. 1996. Mapa de suelos de la provincia de corrientes 1:500.000. EEA-INTA Corrientes, Recursos Naturales.
- Fassola, H., Crechi, E., Keller, A. y Barth, S. 2007. Funciones de forma de exponente variable para la estimación de diámetros a distintas alturas en *Eucalyptus grandis* Hill ex Maiden. cultivado en la mesopotamia argentina. *RIA*. 36(2): 109-128.
- Fassola, H. E., Crechi, E. H., Keller, A. E., Barth, S. R., Colcombet, L., Pacual, F. y Di Rienzo, J. A. 2013. PlaFor NEA V1.0. Plataforma de gestión forestal. Manual de Usuario.
- Fischer, F., Scolforo, J. J. R. S., Júnior, F. F. W. A., de Mello, J. M., Maestri, R. y Mello, J. 2001. Exatidão dos modelos polinomiais não-segmentados e das razões entre volumes para representar o perfil do tronco de *Pinus taeda*. *Ciência Florestal*. 11(1): 167-188.
- Flewelling, J. W. 1993. Variable-shape stem-profile predictions for western hemlock. Part II. Predictions from DBH, total height, and upper stem measurements. *Canadian Journal of Forest*

- Research*. 23(3): 537-544.
- Flewelling, J. W. y Raynes, L. M. 1993. Variable-shape stem profile predictions for western hemlock. Part I. Predictions from DBH and total height. *Canadian Journal of Forest Research*. 23(3): 520-536.
- Garber, S. M. y Maguire, D. A. 2003. Modeling stem taper of three central Oregon species using nonlinear mixed effects models and autoregressive error structures. *Forest Ecology and Management*. 179(1-3): 507-522. [https://doi.org/10.1016/S0378-1127\(02\)00528-5](https://doi.org/10.1016/S0378-1127(02)00528-5).
- García, O. 1988. Growth modelling —a (re)view. *New Zealand Forestry*. 33(3): 14-17.
- García, O. 1994. The state-space approach in growth modelling. *Canadian Journal of Forest Research*. 24: 1894-1903.
- García, O. 1998. Estimating top height with variable plot sizes. *Canadian Journal of Forest Research*. 28(10): 1509-1517. <https://doi.org/10.1139/x98-128>.
- García, O. 2005. Unifying sigmoid univariate growth equations. *Forest Biometry, Modelling and Information Sciences*. 1(October): 63-68.
- García, O. 2008. Visualization of a general family of growth functions and probability distributions - The Growth-curve Explorer. *Environmental Modelling and Software*. 23(12): 1474-1475. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2008.04.005>.
- García, O. 2015. Dynamic modelling of tree form. *Mathematical and Computational Forestry & Natural-Resource Sciences*. 7(March): 9-15.
- Gehrhardt, E. 1921. Eine neue Kiefern-Ertragstafel. *Allg. Forst. Jagdztg*. 97: 145-156.
- Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S. y Rubin, D. B. 2004. *Bayesian Data Analysis* (2nd ed.). Chapman & Hall, New York, US.
- Gelman, A. y Hill, J. 2007. *Data Analysis Using Regression and Multilevel/Hierarchical Models*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Gómez-García, E., Diéguez-Aranda, U., Ózcelik, R., Sal-Cando, M., Castedo-Dorado, F., Crecente-Campo, F., Corral-Rivas, J. J. y Arias-Rodil, M. 2016. Desarrollo de una función de perfil mediante modelos mixtos para *Pinus sylvestris* en Turquía: selección de parámetros fijos a expandir. *Bosque*. 37(1): 159-167. <https://doi.org/10.4067/s0717-92002016000100015>.
- Gray, H. R. 1956. *The form and taper of forest tree stems*. Imperial Forestry Institute, University of Oxford, UK.
- Gregoire, T. G. y Schabenberger, O. 1996. A non-linear mixed-effects model to predict cumulative bole volume of standing trees. *Journal of Applied Statistics*. 23(2-3): 257-272. <https://doi.org/10.1080/02664769624233>.
- Gupta, R. y Sharma, L. K. 2019. The process-based forest growth model 3-PG for use in forest management: A review. *Ecological Modelling*. 397(January): 55-73. <https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2019.01.007>.
- Hanberry, B. B., Fraver, S., He, H. S., Yang, J., Dey, D. C. y Palik, B. J. 2011. Spatial pattern corrections and sample sizes for forest density estimates of historical tree surveys. *Landscape Ecology*. 26(1): 59-68. <https://doi.org/10.1007/s10980-010-9533-7>.
- Hasenauer, H. 2006. *Sustainable Forest Management. Growth Models for Europe*. Springer Science, Berlin, Alemania. 400 pp.
- Knoebel, B. R., Burkhardt, H. E. y Beck, D. E. 1986. A growth and yield model for thinned stands of

- yellow-poplar. *Forest Science. Monograph* 27.
<https://doi.org/10.1093/forestscience/32.s2.a0001>.
- Kozak, A. 1988. A variable-exponent taper equation. *Canadian Journal of Forest Research*. 18: 1363-1368.
- Kozak, A. 1997. Effects of multicollinearity and autocorrelation on the variable-exponent taper functions. *Canadian Journal of Forest Research*. 27(5): 619-629. <https://doi.org/10.1139/x97-011>.
- Kozak, A. 2004. My last words on taper equations. *The Forestry Chronicle*. 80(4): 507-515. <https://doi.org/10.5558/tfc80507-4>
- Kozak, A., Munro, D. D. y Smith, J. H. G. 1969. Taper functions and their application in forest inventory. *The Forestry Chronicle*. 45(4): 278-283. <https://doi.org/10.5558/tfc45278-4>.
- Landsberg, J. J. y Waring, R. H. 1997. A generalised model of forest productivity using simplified concepts of radiation-use efficiency, carbon balance and partitioning. *Forest Ecology and Management*. 95(3): 209-228. [https://doi.org/10.1016/S0378-1127\(97\)00026-1](https://doi.org/10.1016/S0378-1127(97)00026-1).
- Lansanova, L. R., Machado, S. D. A., Garrett, A. T. D. A., Bonete, I. P., Pelissari, A. L., Filho, A. F., da Silva, F. A. y Ciarnoschi, L. D. 2019. Mixed-effect non-linear modelling for diameter estimation along the stem of *Tectona grandis* in mid-western Brazil. *Southern Forests*. 81(2): 167-173. <https://doi.org/10.2989/20702620.2018.1531279>.
- Larson, P. R. 1963. Stem form development of forest trees. *Forest Science, Monograph 5*, Society of American Foresters.
- Larson, B. C. 1986. Development and growth of even-aged stands of Douglas-fir and grand fir. *Canadian Journal of Forest Research*, 16(2), 367-372.
- Le Roux, X., Lacointe, A., Escobar-Gutierrez, A. y Le Ditz, S. 2001. Carbon-based models of individual tree growth: A critical appraisal. *Annals of Forest Science*. 58(5): 469-506. <https://doi.org/10.1051/forest:2001140>.
- Lindstrom, M. J. y Bates, D. M. 1988. Newton-Raphson and EM algorithms for linear mixed-effects models for repeated-measures data. *Journal of the American Statistical Association*. 83(404): 1014-1022.
- Lindstrom, M. J. y Bates D. M. 1990. Nonlinear mixed effects models for repeated measures data. *Biometrics*. 46(3): 673-687.
- Madrigal Collazo, A., Álvarez-González, J. G., Rojo-Alboreca, A. y Rodríguez-Soalleiro, R. 1999. *Tablas de producción para los montes españoles*. Fundación Conde del Valle de Salazar, Madrid (España).
- Mäkelä, A. 1986. Implications of the pipe model theory on dry matter partitioning and height growth in trees. *Journal of Theoretical Biology*. 123(1): 103-120.
- Marske, D. M. 1967. BOD: data interpretation using the sum of squares surface. University of Wisconsin, Madison.
- Martinelli de Souza, C. A., César, G. F. A., Schneider, R. P., Fernandes da Silva, G. y Thomas, C. 2012. Efficiency of a taper model adjusted with and without stratification by class of form quotient for the assortment of *Pinus taeda* L. *Ciência Florestal*. 22(1): 125-135.
- Max, T. y Burkhart, H. E. 1976. Segmented polynomial regression applied to taper equations. *Forest Science*. 22(3): 283-289.
- Meng, S. X., Huang, S., Vanderschaaf, C. L., Yang, Y. y Trincado, G. 2012. Accounting for serial

- correlation and its impact on forecasting ability of a fixed- and mixed-effects basal area model: A case study. *European Journal of Forest Research*. 131(3): 541-552. <https://doi.org/10.1007/s10342-011-0527-z>.
- Metzger, K. 1893. Der Wind als maßgebender Faktor für das Wachstum der Bäume. *Mündener Forstliche Hefte*. 5: 35-86.
- Michael, S. W. y Reich, R. M. 1997. Exploring the error structure of taper equations. *Forest Science*. 43(3): 378-386.
- Minasny, B. y McBratney, A. B. 2006. A conditioned Latin hypercube method for sampling in the presence of ancillary information. *Computers and Geosciences*. 32(9): 1378-1388. <https://doi.org/10.1016/j.cageo.2005.12.009>.
- Mojena, P. A., Caldeira, S. F., Silva, D. y Wruck, F. J. 2019. Site index and height-growth curves for *Eucalyptus urograndis*. *Scientific Electronic Archives*. 12(5): 21-26. <https://doi.org/10.36560/1252019789>.
- Muhairwe, C. K. 1993. *Examination and modelling of tree form and taper over time for interior lodgepole pine*. Thesis of Doctor of Philosophy, University of British Columbia.
- Muhairwe, C. K. 1999. Taper equations for *Eucalyptus pilularis* and *Eucalyptus grandis* for the north coast in New South Wales, Australia. *Forest Ecology and Management*. 113(2-3): 251-269. [https://doi.org/10.1016/S0378-1127\(98\)00431-9](https://doi.org/10.1016/S0378-1127(98)00431-9)
- Munro, D. D. 1966. The distribution of log size and volume within trees. A preliminary investigation. University of British Columbia. Fac. of For, 27.
- Munro, D. D. 1974. Forest growth models: a prognosis, in growth models for tree and stand simulation. Research Note 30. Department of Forest Yield Research, Royal College of Forestry, Stockholm.
- Munro, D. D. 1984. *Growth modelling for fast growing plantation-A review. Site and productivity of fast growing plantations*. IUFRO, Pretoria and Pietermaritzburg.
- Newnham, R. M. 1988. *A variable-form taper function*. Petawawa National Forestry Institute, Chalk River, Ontario (Canada).
- Newnham, R. M. 1992. Variable-form taper functions for four Alberta tree species. *Canadian Journal of Forest Research*. 22: 210-223.
- Nunez-Anton, V. y Woodworth, G. G. 1994. Analysis of longitudinal data with unequally spaced observations and time-dependent correlated errors. *Biometrics*. 50(2): 445-456.
- Núñez-Anton, V. y Zimmerman, D. 2001. Modelización de datos longitudinales con estructuras de covarianza no estacionarias: modelos de coeficientes aleatorios frente a modelos alternativos. *Qüestió*. 25(2): 225-262.
- Oliveira Castro, R. V, Boechat Soares, C. P., Leite, H. G., Lopes de Souza, A., Saraiva Nogueira, G. y Bolzan Martins, F. 2013. Individual growth model for eucalyptus stands in Brazil using artificial neural network. *ISRN Forestry*. 2013: 1-12. <https://doi.org/10.1155/2013/196832>.
- Özçelik, R., Diamantopoulou, M. J. y Trincado, G. 2019. Evaluation of potential modeling approaches for Scots pine stem diameter prediction in north-eastern Turkey. *Computers and Electronics in Agriculture*. 162(March): 773-782. <https://doi.org/10.1016/j.compag.2019.05.033>.
- Peng, C. 2000. Growth and yield models for uneven-aged stands: past, present and future. *Forest Ecology and Management*. 132: 259-279. <https://doi.org/10.1155/2013/196832>.

- Pinheiro, J. C. y Bates, D. M. 1995. Approximations to the Log-Likelihood Function in the Nonlinear Mixed-Effects Model. *Journal of Computational and Graphical Statistics*. 4(1): 12-35.
- Pinheiro, J. C. y Bates, D. M. 2000. *Mixed-effects models in S and S-PLUS* Springer: New York, USA.
- Poudel, K. P. y Cao, Q. V. 2013. Characterizing diameter distributions. *Forest Science*. 59(2): 243-252. <https://doi.org/10.5849/forsci.12-001>.
- Pourahmadi, M. 1999. Joint mean-covariance models with applications to longitudinal data: Unconstrained parametrisation. *Biometrika*. 86(3): 677-690.
- Pourahmadi, M. 2000. Maximum Likelihood Estimation of Generalised Linear Models for Multivariate Normal Covariance Matrix. *Biometrika*. 87(2): 425-435.
- Pressler, M. 1864. Das Gesetz der Stammbildung. *Arnoldische Buchhandlung, Leipzig*.
- Pretzsch, H. 2009. *Forest Dynamics, Growth and Yield. From measurement to model*. Springer, Berlin, Germany. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-88307-4>
- Pretzsch, H., Biber, P. y Durský, J. 2002. The single tree-based stand simulator SILVA: construction, application and evaluation. *Forest Ecology and Management*. 162: 3-21.
- Prodan, M., Peters, R., Cox, F. y Real, P. 1997. *Mensura Forestal*. San José, Costa Rica: GTZ - Instituto Interamericano de Cooperación para la Agricultura.
- R Core Team. 2019. R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.
- Rao, C. R. 1992. Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters. In *Breakthroughs in statistics*. Springer, New York, USA. 235-247 pp.
- Ripley, B. D. 1987. *Stochastic simulation*. John Wiley & Sons, New York, US.
- Ripley, B., Venables, B., Bates, D. M., Hornik, K., Gebhardt, A. y Firth, D. 2019. MASS: support functions and datasets for venables and Ripley's MASS. R package version 7.3-51.5. Disponible en <https://CRAN.R-project.org/package=MASS>.
- Robinson, A. P. y Hamann, J. D. 2010. *Forest Analytics with R: an introduction*. Springer Science & Business Media, New York, USA. 341 pp.
- Rojo, A., Perales, X., Sánchez-Rodríguez, F., Álvarez-González, J. G. y von Gadow, K. 2005. Stem taper functions for maritime pine (*Pinus pinaster* Ait.) in Galicia (Northwestern Spain). *European Journal of Forest Research*. 124(3): 177-186. <https://doi.org/10.1007/s10342-005-0066-6>.
- Sánchez, F., Rodríguez, R., Rojo Alboreca, A., Álvarez González, J., López, C., Gorgoso Varela, J. y Castedo Dorado, F. 2003. Crecimiento y tablas de producción de *Pinus radiata* D. Don en Galicia. *Investigación agraria. Sistemas y recursos forestales*. 12(2): 65-83. <https://doi.org/10.5424/802>.
- Sanquetta, C. R., Arce, J. E., dos Santos Gomes, F. y Coutinho da Cruz, E. 1998. Evaluación y simulación precoces del crecimiento de rodales de *Pinus taeda* L. con matrices de transición. *Quebracho*. 7(1): 31-42.
- Schreuder, H. T., Hafley, W. L. y Bennett, F. A. 1979. Yield prediction for unthinned natural slash pine stands. *Forest Science*, 25(1), 25-30.
- Scolforo, H. F., McTague, J. P., Burkhart, H., Roise, J., Campoe, O. y Stape, J. L. 2019a. Eucalyptus growth and yield system: Linking individual-tree and stand-level growth models in clonal

- Eucalypt plantations in Brazil. *Forest Ecology and Management*. 432(June 2018): 1-16. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2018.08.045>.
- Scolforo, H. F., McTague, J. P., Burkhart, H., Roise, J., McCarter, J., Alvares, C. A. y Stape, J. L. 2019b. Stand-level growth and yield model system for clonal eucalypt plantations in Brazil that accounts for water availability. *Forest Ecology and Management*. 448(May): 22-33. <https://doi.org/10.1016/j.foreco.2019.06.006>.
- Seber, G. A. F. y Wild, C. J. 2003. *Nonlinear regression*. John Wiley & Sons, New Jersey, USA. 768 pp. <https://doi.org/10.1002/0471725315>.
- Shannon, R. E. 1975. Simulation: A survey with research suggestions. *AIIE Transactions*. 7(3): 289-301.
- Sharma, M., Oderwald, R. G. y Amateis, R. L. 2002. A consistent system of equations for tree and stand volume. *Forest Ecology and Management*. 165(1-3): 183-191. [https://doi.org/10.1016/S0378-1127\(01\)00616-8](https://doi.org/10.1016/S0378-1127(01)00616-8).
- Sharma, R. P. y Brunner, A. 2017. Modeling individual tree height growth of Norway spruce and Scots pine from national forest inventory data in Norway. *Scandinavian Journal of Forest Research*. 32(6): 501-514. <https://doi.org/10.1080/02827581.2016.1269944>.
- Shinozaki, K., Yoda, K., Hozumi, K. y Kira, T. 1964. A quantitative analysis of plant form- the pipe model theory: II. Further evidence of the theory and its application in forest ecology. *Japanese J. of Ecology*. 14(4): 133-139.
- Sun, S., Cao, Q. V. y Cao, T. 2019. Evaluation of distance-independent competition indices in predicting tree survival and diameter growth. *Canadian Journal of Forest Research*. 1-32.
- Tasissa, G. y Burkhart, H. E. 1997. An application of mixed effects analysis to modeling thinning effects on stem profile of loblolly pine. *Forest Ecology and Management*. 103(1): 87-101. [https://doi.org/10.1016/S0378-1127\(97\)00179-5](https://doi.org/10.1016/S0378-1127(97)00179-5).
- Tasissa, G. y Burkhart, H. E. 1998. An application of mixed effects analysis to modeling thinning effects on stem profile of loblolly pine. *Forest Ecology and Management*. 103(1): 87-101. [https://doi.org/10.1016/S0378-1127\(97\)00179-5](https://doi.org/10.1016/S0378-1127(97)00179-5).
- Thren, M. y Zerda, H. R. 1994. *Inventario forestal de la provincia de Santiago del Estero, Departamentos Copo y Alberdi*. Convenio Provincia de Santiago del Estero, Consejo Federal de Inversiones, GTZ, UNSE, Facultad de Ciencias Forestales.
- Trincado, G. y Burkhart, H. E. 2006. A generalized approach for modeling and localizing stem profile curves. *Forest Science*. 52(6): 670-682.
- Vanclay, J. 1994. *Modelling forest growth and yield: applications to mixed tropical forest*. CAB International, Wallingford, UK.
- Webster, R. y Oliver, M. A. 2007. *Geostatistics for Environmental Scientists, 2nd Edition*. John Wiley & Sons, Hoboken, USA. 333 pp.
- Wykoff, R. W., Crookston, N. L. y Stage, A. R. 1982. *User's Guide to the Stand Prognosis Model*. General Technical Report INT-133. 118 pp.
- Yuncaí, L. y Parresol, B. R. 2001. *Remarks on height-diameter modeling*. Res. Note SE - 10. Asheville, USA. Department of Agriculture, Forest Service, Southeastern Forest Experiment Station.
- Zhang, B., DeAngelis, D. L., Rayamajhi, M. B. y Botkin, D. 2017. Modeling the long-term effects of introduced herbivores on the spread of an invasive tree. *Landscape Ecology*. 32(6): 1147-1161.

<https://doi.org/10.1007/s10980-017-0519-6>.

Anexo A. Diagnóstico en el ajuste de funciones del MCF

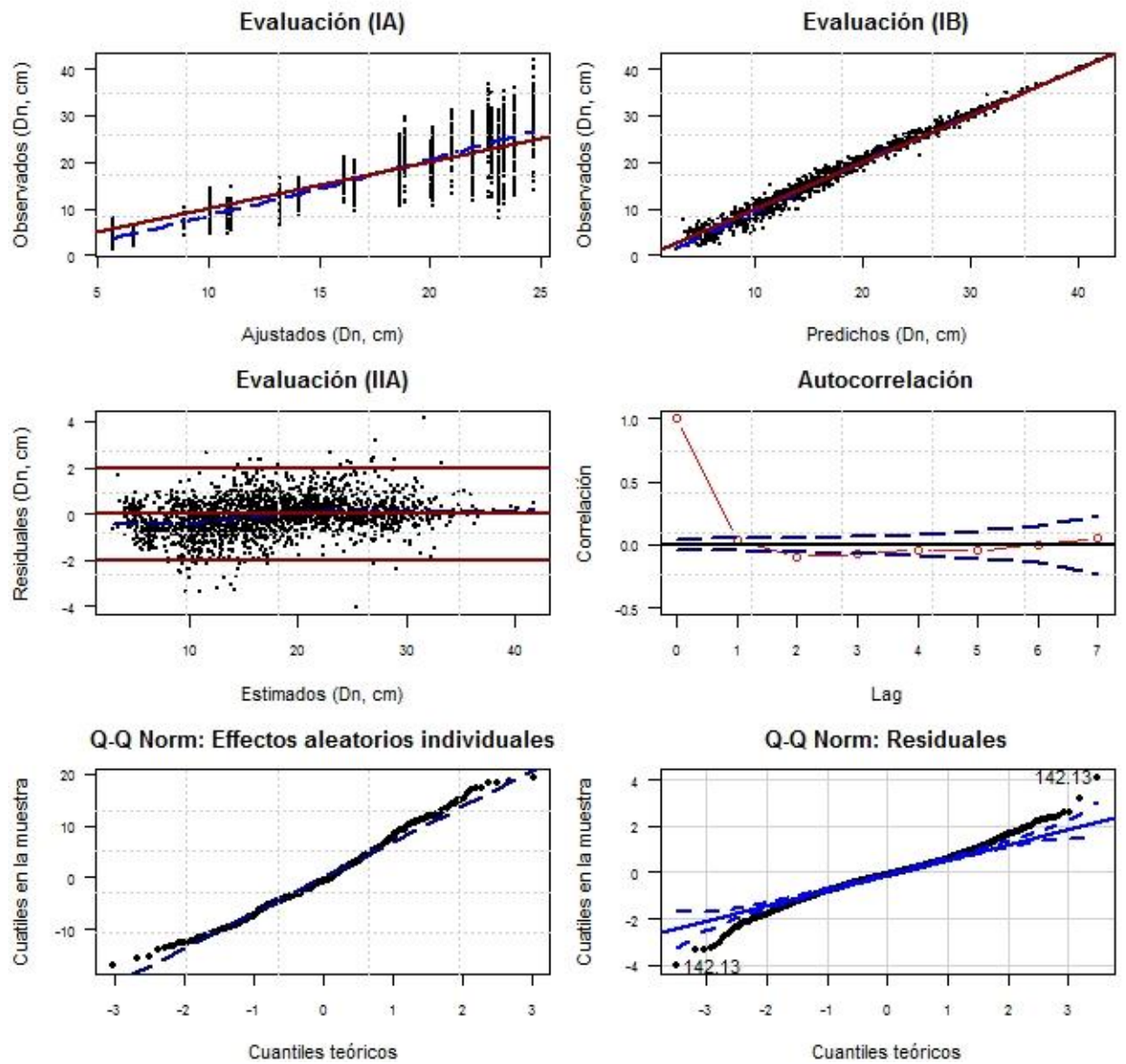


Figura 19. Evaluación gráfica del modelo BOD III, ajuste y supuestos distribucionales.

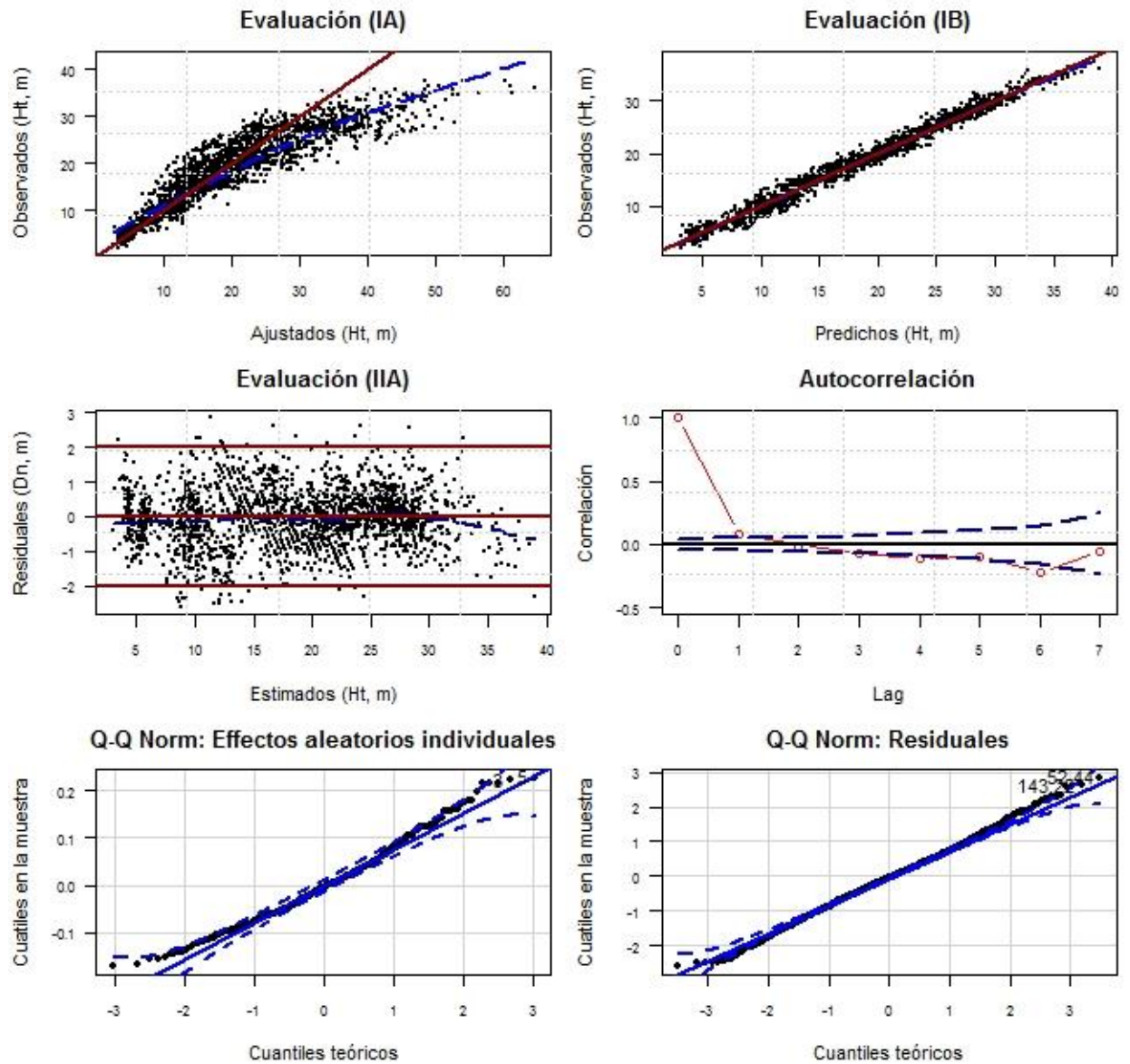


Figura 20. Evaluación gráfica de la capacidad predictiva y el cumplimiento de supuestos distribucionales de la función hipsométrica seleccionada (Schröder II).

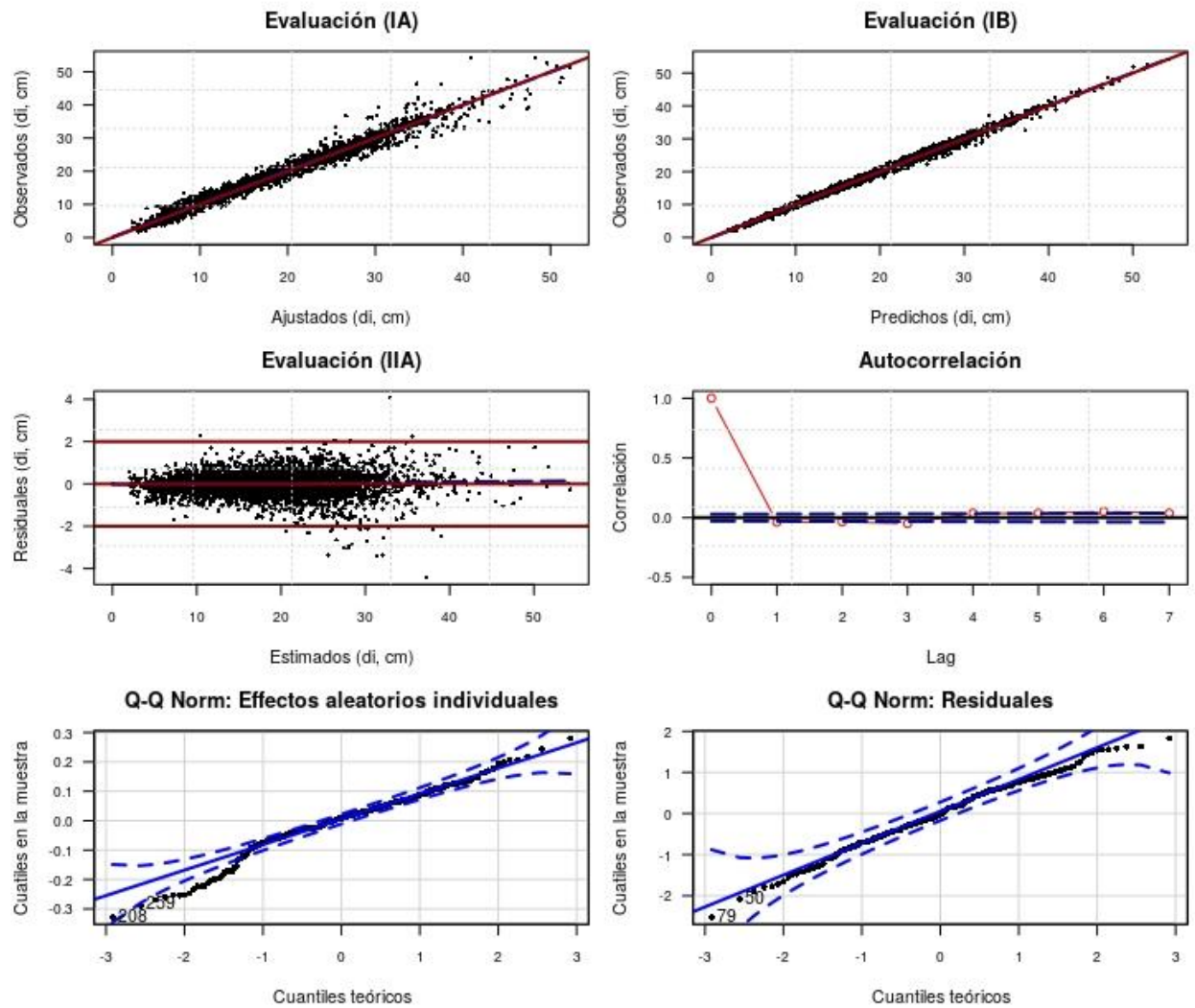


Figura 21. Evaluación de la capacidad predictiva y del cumplimiento de los supuestos distribucionales de los componentes aleatorios en la estimación de la función de Kozak (2004).

Anexo B. Implementación En R

- a) **Paso I de Figura 4.** Esquema de la simulación del crecimiento individual y de perfiles dinámicos de la sección transversal con procesos de dependencia del error (ϵ) en *Eucalyptus grandis*. θ corresponde al vector de coeficientes aleatorios de distribución normal con vector de media α y matriz de variancia Λ , los supraíndices D , H y d identifican los componentes de D_n , H_t y diámetro en el fuste, \mathbf{x} el vector de estados de funciones de transición globales del D_n , $F1$, y la H_t , $F2$, $g()$ la función de ahusamiento diamétrico, Σ la matriz de covariancias de ϵ y \mathbf{st}_{it} el vector de ahusamiento de la sección transversal en el i -ésimo individuo a la edad t .

```
### Trozo de la simulación de los coeficiente ai y bi, queda inhabilitado
## Los tiempos se disminuyen en 10 unidades al compilar en el paquete Rcpp

dif.mean = 10

dif.v = 10
ns=5000
set.seed()
while(dif.mean > 10^(-5) & dif.v > 10^(-5)) {
  df.growth<-as.data.frame(
    cbind(
      rmvnorm(n=ns,
        mean= c(25.213, -1.366),
        matrix( c(53.635, -1.701,-1.701, 0.0723),
          nrow = 2, byrow = F),
          method = "chol",
          checkSymmetry = TRUE), # a1 y a2

      rmvnorm(ns, 1.444, 0.00622,
        method = "chol",
        checkSymmetry = TRUE), # a4

      rmvnorm(ns, mu = c(0.10866, -1.0082, 0.0463, -0.1722),
        matrix( c(0.1358^2, 0.1358*0.8115*0.185,
          - 0.1358*0.0409*0.124,0.1358*0.1043*0.254,
          0.1358*0.8115*0.185, 0.8115^2,
          -0.8115*0.0409*0.963, 0.8115*0.1043*0.982,
          -0.1358*0.0409*0.124, -0.8115*0.0409*0.963,
          0.0409^2,-0.0409*0.1043*0.958,0.1358*0.1043*0.254,
          0.8115*0.1043*0.982, -0.0409*0.1043*0.958,0.1043^2),
          nrow = 4, byrow = T),
          method = "chol",
          checkSymmetry = TRUE)
      )
    )
  dif.mean = norm(as.matrix(c(colMeans(df.growth)) - c(25.2127, -1.3664, 1.4441,
    0.1092, -1.0050, 0.046181, -0.171981)),type = "F")
  ns = ns +10^3
}

df.growth %>% as.tibble -> df.growth

## Apartado de manipulación de la Población hasta el muestreo
```

- b) **Paso II de Figura 4.** Esquema de la simulación del crecimiento individual y de perfiles dinámicos de la sección transversal con procesos de dependencia del error (ϵ) en *Eucalyptus grandis*. θ corresponde al vector de coeficientes aleatorios de distribución normal con vector de media α y matriz de variancia Λ , los supraíndices D , H y d identifican los componentes de D_n , H_t y diámetro en el fuste, \mathbf{x} el vector de estados de

funciones de transición globales del Dn, F₁, y la Ht, F₂, g() la función de ahusamiento diamétrico, Σ la matriz de covariancias de **e** y **st_{it}** el vector de ahusamiento de la sección transversal en el i-ésimo individuo a la edad t.

```
#### Tamaño de muestra segun error admisible
error_m=1
n_inicio= 300

while(error_m >0.05){
muestra <- coeficientes %>% sample_n(n_inicio, replace = T)
error_m= sd(muestra$a1)/sqrt(n_inicio)
n_inicio=n_inicio + 25
}

errorm <- NULL
#data.frame(q=seq(1, 20001, 100))
for (j in 1:10) {
error<-data.frame()
for(i in seq(1, 20001, 100)){
error_i<- sqrt(sum(((sample_n(coeficientes,i, replace = T)$a1) -
mean(coeficientes$a1))^2))/(i-1)
error <- rbind(error, error_i)
}
errorm <- rbind(errorm,error)
}

colnames(errorm) <- "Error"
errorm$ID.M <-as.factor(c(rep("M1", 201), rep("M2", 201), rep("M3", 201),
rep("M4", 201), rep("M5", 201),
rep("M6", 201),rep("M7", 201),rep("M8", 201), rep("M9", 201),
rep("M10", 201)))
errorm$q <- c(rep(seq(1, 20001, 100),10))

errorm %>% str

coeficientes %>% sample_n(5000, replace = TRUE) %>%
cbind(Id.trees =seq(1:5000), df.growth) -> df.growth
```

- c) Paso III de Figura 4.** Esquema de la simulación del crecimiento individual y de perfiles dinámicos de la sección transversal con procesos de dependencia del error (**e**) en *Eucalyptus grandis*. θ corresponde al vector de coeficientes aleatorios de distribución normal con vector de media α y matriz de variancia Λ , los supraíndices D, H y d identifican los componentes de Dn, Ht y diámetro en el fuste, **x** el vector de estados de funciones de transición globales del Dn, F₁, y la Ht, F₂, g() la función de ahusamiento diamétrico, Σ la matriz de covariancias de **e** y **st_{it}** el vector de ahusamiento de la sección transversal en el i-ésimo individuo a la edad t.

```
### Parte fija
df.growth <- cbind(df.growth[,c(1:3)],b1 = rep (.28790053, 5000),
df.growth[4],c1= rep(1.026951, 5000),
c2= rep(0.980811, 5000),c3 = rep(-0.010807, 5000),
df.growth[,c(5:6)] ,c6 = rep(0.079442, 5000),
c7 = rep(6.651081,5000), df.growth[,c(7:8)] )

df.edad<- expand.grid(Id.trees =seq(1:5000),Edad= seq(0, 15, by = 1))
df.growth<-merge(df.edad, df.growth) # 5

rm(df.edad)
```

```

Dn_bod <- function(a1,a2, Edad){
  a1*(1-exp(-exp(a2)*Edad))    ## Función del Diámetro
}
Ht_Sch <- function(a3, a4, Dn){ 1.3 + a3*Dn^a4}    ## Función Hipsometrica
df.growth$Dn <- with(df.growth, Dn_bod(a1,a2, Edad))
df.growth$Ht <- with(df.growth, Ht_Sch(b1, b2, Dn))

df.growth <-df.growth[(df.growth$Edad %in% c(9,12,15)),]    ###Acotando t
df.growth <- df.growth[,-c(3:6)]

```

- d) Paso IV – V de Figura 4.** Esquema de la simulación del crecimiento individual y de perfiles dinámicos de la sección transversal con procesos de dependencia del error (**e**) en *Eucalyptus grandis*. θ corresponde al vector de coeficientes aleatorios de distribución normal con vector de media α y matriz de variancia Λ , los supraíndices D, H y d identifican los componentes de Dn, Ht y diámetro en el fuste, **x** el vector de estados de funciones de transición globales del Dn, F₁, y la Ht, F₂, g() la función de ahusamiento diamétrico, Σ la matriz de covariancias de **e** y **st_{it}** el vector de ahusamiento de la sección transversal en el i-ésimo individuo a la edad t.

```

### Paso VI
df.seccion <- data.frame()
for (i in 1:length(df.growth$Ht)) {
  ggg<-as.data.frame(cbind(ID.perfil=i, Hc=c(seq(0,df.growth$Ht[i], by = 1))))
  df.seccion <- rbind(df.seccion, ggg)
}

proc.time()

df.growth<- cbind(ID.perfil=unique(df.seccion$ID.perfil), df.growth)

df.perfiles<-merge(df.growth, df.seccion)
df.perfiles %>% head

kozak04 <- function(Dn, Ht, Hc, c1, c2, c3, c4, c5,c6, c7, c8, c9){
  (c1*Dn^c2*Ht^c3)*((1-(Hc/Ht)^(1/3))/(1-0.05^(1/3)))^
  (c4*(Hc/Ht)^4 + c5*(1/exp(Dn/Ht)) + c6*((1-(Hc/Ht)^(1/3))/(1-0.05^(1/3)))^0.1
  +
  c7/Dn + c8*Ht^(1-(Hc/Ht)^(1/3)) +c9*((1-Hc^(1/3))/(1-0.05^(1/3))))}

df.perfiles$di<-with(df.perfiles, kozak04(Dn, Ht, Hc, c1, c2, c3, c4, c5,c6, c7,
c8, c9))

df.perfiles %>% head
df.perfiles[df.perfiles$Hc==0,]$Hc <-0.01

df.perfiles <- df.perfiles[-c(4:12)]

### borrar SOLO cuando sea necesario

rm(list = c("df.growth", "ggg", "df.seccion", "i"))

#### Addind AR Structur
### ar de grado 1, dependenci baja (0.5) y variancia baja (40²)

set.seed() #Definido en el loop superior
ar1 <- corAR1(value=.5, form=~1|ID.perfil)
ar1.m <-Initialize(ar1, data = df.perfiles)

## Aqui
proc.time()->p

epsilon_ar1 <- c()

```

```

for (k in 1:max(as.numeric(df.perfiles$ID.perfil))) {
  l = length(df.perfiles$ID.perfil[df.perfiles$ID.perfil == k]) # cantidad de
  datos en el perfil
  epsilonk <- mvrnorm(n = 1, mu = rep(0, l),
    Sigma = 40^2*(corMatrix(ar1.m))[[k]])
  ### alternativa es indicar a sigma como una chi cuadrado, me dio lo mismo
  epsilon_ar1 <- c(epsilon_ar1, epsilonk)
}
proc.time()-p->p2

df.perfiles %>% names

df.perfiles$star1_bb <- (pi*(df.perfiles$di/100)^2)/4 + epsilon_ar1

#/**
# limpio hasta aqui
#*/

set.work <- df.perfiles %>% sample_frac(0.8)

set.valid <- df.perfiles[df.perfiles$ID.perfil %in%
  -c(unique(set.work$ID.perfil)),]## este valida

```